II prova di esonero di Fisica Matematica 1
Corso di laurea in Matematica
4 giugno 2018

Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P e da un disco, rispettivamente di massa m e M, i quali si muovono in un riferimento inerziale $Oxyz$, con l'asse delle z che è posta in *verticale*. Il punto P è vincolato a muoversi su un'elica inscritta in un cilindro e caratterizzata dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = l\alpha \\ y = R\sin\alpha \\ z = -R\cos\alpha \end{cases} \qquad \forall\ \alpha \in \mathbf{R}\ .$$

Il disco ha il suo centro in C, raggio R, spessore infinitesimo e densità di massa omogenea al suo interno. Esso rotola senza strisciare al di sopra di una guida rettilinea di massa trascurabile e di coordinate

$$y = \eta\ , \qquad z = -R\ ,$$

dove R è ovviamente fisso e η è variabile. Ciascuno dei punti che compongono tale guida può quindi traslare parallelamente all'asse y. Una molla ideale e di lunghezza a riposo nulla, collega il punto P al centro del disco C. Il valore della sua costante elastica è uguale a k.
È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero m, M, R e k, abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo che, nel loro moto, il disco e la guida rettilinea possano attraversare il punto P e la guida a forma di elica, senza che questi oggetti si scontrino. Si risponda alle domande seguenti.

(1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.

(2) Si consideri ora il sistema quando è soggetto a un ulteriore vincolo ideale, realizzato in modo tale che la molla sia sempre in direzione parallela al piano Oyz (o, equivalentemente, la coordinata x del punto P sia sempre uguale a quella del centro C). Si deteminino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.

(3) Si rimuova ora il vincolo descritto al punto (2). Si introduca invece un nuovo vincolo ideale, realizzato in modo tale che la molla sia sempre in

direzione parallela al piano Oxz (o, equivalentemente, la coordinata y del punto P sia sempre uguale a quella del centro C). Si studi un tale sistema limitatamente al caso in cui $l = 0$ (si noti che ciò implica che il punto P si muove ora nel piano Oyz).

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton per il nuovo sistema. Si determinino due costanti del moto indipendenti l'una dall'altra.

(3B) Si scriva la approssimazione quadratica della Hamiltoniana associata alle piccole oscillazioni (sia del punto P che del disco) nei pressi dell'asse z.

Siano rispettivamente T_y il periodo di oscillazione del punto P e T_x quello del disco nel piano Oxz, quando il punto P rimane in quiete in corrispondenza alle coordinate $(0, 0, -R)$. Si calcolino T_x e T_y utilizzando la suddetta approssimazione quadratica della Hamiltoniana. Si verifichi che per ogni fissato numero reale $B > 0$ (che si intende essere preso grande a piacere), esistono valori opportuni dei parametri per cui il rapporto dei periodi dei modi normali di oscillazione è tale che

$$\frac{T_y}{T_x} > B \ .$$