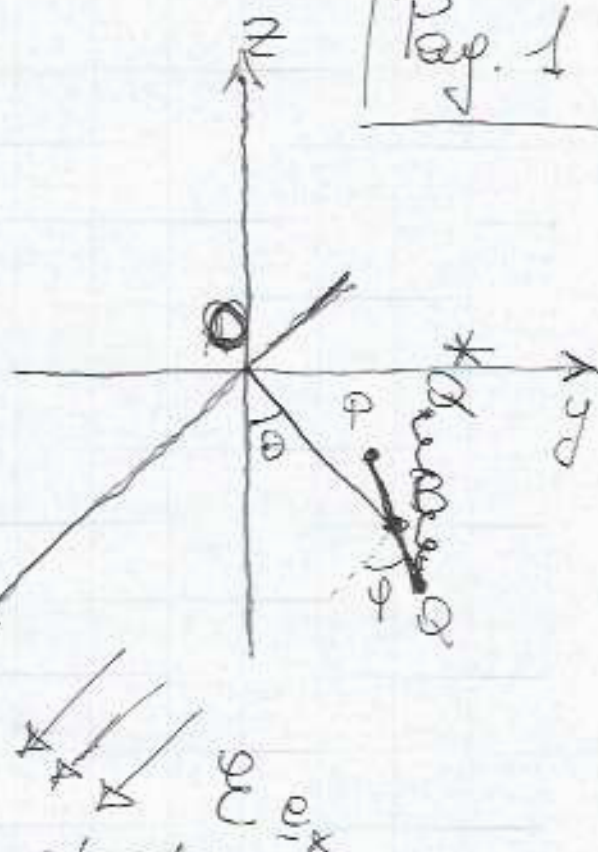


II Appello scritto
di Fisica Matematica I
per il mese di Settembre
2018

Pag. 1



$\overline{OB} = R$, massa asta 1 = M

$\overline{PQ} = 2l$, massa asta 2 = m

$\overline{PQ} \perp$ asse z , $\overline{QQ^*} \perp$ piano Oxy

Costante molla tra Q e $Q^* = k$

Carica elettrica in $Q = q$

Campo elettrico: $E \underline{e}_x$ con E costante.

(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange

Utilizziamo gli angoli θ e φ come coordinate libere o lagrangiane. θ è l'angolo formato dalla prima asta con la semiretta formata dalla parte dell'asse z con valori negativi. φ è l'angolo formato da BQ con la semiretta uscente da B parallela ed equiversa con la semiretta formata dalla parte dell'asse x con valori positivi.

Cominciamo a determinare le coordinate di alcuni p.ti notevoli.

Coord. B : $R(0, \sin \theta, -\cos \theta)$

Coord. Q: $(l \cos \varphi, R \sin \theta + l \sin \varphi, -R \cos \theta)$ | Pag. 2

E' utile calcolare anche

$$\underline{V}_B = R \dot{\theta} (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

Per determinare l'energia cinetica è conveniente applicare il teorema di König alla seconda asta, in modo da ottenere:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \underline{V}_B \cdot \underline{V}_B + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2,$$

dove $I_1 = \frac{MR^2}{3}$, $I_2 = \frac{m l^2}{12} = \frac{m l^2}{3}$.

$$\Rightarrow T = \frac{MR^2}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m l^2}{6} \dot{\varphi}^2 \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \right) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m l^2}{6} \dot{\varphi}^2.$$

Consideriamo ora l'energia potenziale, che è data dai seguenti contributi.

$$U = \frac{1}{2} M g z_B + \frac{1}{2} k z_B^2 - q E x_Q,$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ nel primo termine (cioè $\frac{1}{2} M g z_B$) tiene conto del fatto che possiamo assumere che tutta la massa della prima asta sia concentrata

nel suo baricentro, ai fini del calcolo dell'energia potenziale. Inoltre, nella scrittura dell'energia potenziale elastica, cioè $kz_B^2/2$, abbiamo tenuto conto del fatto che $z_Q = z_B$.

Andando a sostituire le espressioni di z_B e x_Q in funzione delle coordinate libere, otteniamo

$$U = -\left(\frac{1}{2}M + m\right)gR \cos \vartheta + \frac{k}{2}R^2 \cos^2 \vartheta - q\ell \cos \varphi.$$

Possiamo quindi scrivere la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)R^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{M}{2} + m\right)gR \cos \vartheta - \frac{k}{2}R^2 \cos^2 \vartheta + q\ell \cos \varphi.$$

e le eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \left(\frac{M}{3} + m\right)R^2\ddot{\vartheta} + \left(\frac{M}{2} + m\right)gR \sin \vartheta - kR^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\varphi} + q\ell \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

(2) Studio della stabilità
dei p.ti di equilibrio e
della loro stabilità

Pag. 6

Dobbiamo innanzitutto risolvere le equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -kR^2 \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{M}{2} + m\right) g R \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= \ell \sin \varphi = 0 \end{aligned} \right.$$

Dalla seconda di queste equazioni segue

$$\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi.$$

Dalla prima si ottiene che

$$kR \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right) g}{kR} \right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = 0, \pi$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \pm \beta \text{ dove } \beta = \arccos \left(\frac{\left(\frac{M}{2} + m\right) g}{2kR} \right)$$

Ricapitolando, i p.ti
di equilibrio sono

ovviamente queste soluzioni
esistono se $\frac{\left(\frac{M}{2} + m\right) g}{2kR} \leq 1$.

$(\theta, \varphi) \in \{(0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi), (\pm \beta, 0), (\pm \beta, \pi)\}$, dove
le ultime due coppie esistono se $\frac{\left(\frac{M}{2} + m\right) g}{2kR} \leq 1$.

Allo scopo di studiare la stabilità dei punti di equilibrio, è conveniente calcolare l'espressione generale dell'Hessiano del potenziale, cioè

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} -kR^2(2\cos^2\vartheta - 1) + \left(\frac{\pi}{2} + u\right)gR\cos\vartheta & 0 \\ 0 & g\ell\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Possiamo a considerare l'Hessiano nei vari casi particolari, per ciascuno dei p.ti di equilibrio.

- Caso $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\vartheta=0 \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi}{2} + u\right)gR - kR^2 & 0 \\ 0 & g\ell \end{pmatrix}$$

Il secondo autovalore, cioè $g\ell$, è sicuramente positivo, quindi la stabilità dipende esclusivamente dal primo autovalore, che appare in alto sulla diagonale principale -

• Sottocaso $\frac{(\pi + 2u)g}{2kR} > 1$

Abbiamo allora che $\left(\frac{\pi}{2} + u\right)gR - kR^2 = kR^2 \frac{(\pi + 2u)g}{2kR} > 1$

Se come entrambi gli autovalori sono positivi, allora $(0,0)$ è STABILE.

Pag. 6

• Sottocaso $\frac{(M+2m)g}{2kR} < 1$

$\Rightarrow \left(\frac{M}{2} + m\right)gR - kR^2 < 0 \Rightarrow 1 \text{ autoval. neg. e } 1 \text{ pos.}$

$\Rightarrow (0,0)$ è INSTABILE

• Sottocaso $\frac{(M+2m)g}{2kR} = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{M}{2} + m\right)gR - kR^2 = 0 \Rightarrow 1 \text{ autoval. pos e } 1 \text{ nullo}$

$\Rightarrow$ è necessario un supplemento di indagine

- Caso $(\theta, \varphi) = (0, \pi)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=\pi}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{M}{2} + m\right)gR - kR^2 & 0 \\ 0 & -g\ell\ell \end{pmatrix}$$

Il secondo autovalore, cioè $-g\ell\ell$, è sempre negativo

$\Rightarrow (0, \pi)$ è INSTABILE

- Caso $(\theta, \varphi) = (\pi, 0)$

Pag. 7

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} -kR^2 - \left(\frac{\pi}{2} + u\right)gR & 0 \\ 0 & g\epsilon\ell \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow (\pi, 0)$ è INSTABILE.

- Caso $(\theta, \varphi) = (\pi, \pi)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \varphi=\pi}} = \begin{pmatrix} -kR^2 - \left(\frac{\pi}{2} + u\right)gR & 0 \\ 0 & -g\epsilon\ell \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2 autoval. neg. $\Rightarrow (\pi, \pi)$ è instabile.

- Caso $(\theta, \varphi) = (\pm\beta, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pm\beta \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} -kR^2 \left(\frac{2(\pi+2u)^2 g^2}{4k^2 R^2} - 1 \right) + \frac{1}{2}(\pi+2u)g \frac{(\pi+2u)g}{2kR} & 0 \\ 0 & g\epsilon\ell \end{pmatrix}$$

Il secondo autovalore è sicuramente positivo.

Il primo autovalore diventa

$$kR^2 \left(1 - \frac{(\pi+2u)^2 g^2}{4k^2 R^2} \right).$$

Il segno dipende, ovviamente, dai parametri.

• Sottocaso $\frac{(1+2u)g}{2kR} < 1$ | Pag. 8

Abbiamo allora che entrambi gli autovalori sono positivi $\Rightarrow (\pm\beta, 0)$ sono STABILI.

• Sottocaso $\frac{(1+2u)g}{2kR} > 1$

In questo sottocaso $(\pm\beta, 0) \notin \mathcal{F}$, quindi è corretto studiare la stabilità.

• Sottocaso $\frac{(1+2u)g}{2kR} = 1$

Abbiamo allora che l'autovel. è pos. e $\neq 0$
 $\Rightarrow$ è necessario un supplemento di indagine.

— Caso $(\theta, \varphi) = (\pm\beta, \pi)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta = \pm\beta \\ \varphi = \pi}} = \begin{pmatrix} -kR^2 \left(\frac{(1+2u)g^2}{2kR^2} - 1 \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{(1+2u)g^2}{2k} \right) & 0 \\ 0 & 0 & -g\mathcal{E} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ l'autovel. è sicuramente nullo, quindi
 $(\pm\beta, \pi)$ sono p.ti di equilibrio INSTABILI

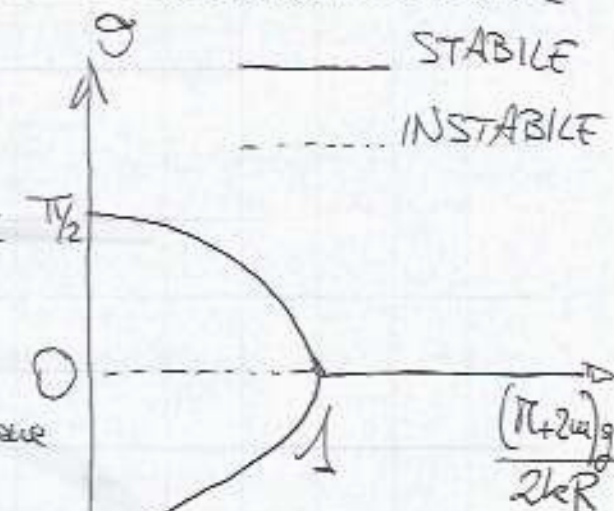
Riconsideriamo ora le 3 situa- Pag. 9
zioni che sono rimaste in
sospeso, cioè i punti di equilibrio

$$(0, 0), (\beta, 0), (-\beta, 0)$$

quando $\frac{(\pi+2m)g}{2kR} = 1$.

Osserviamo allora che $\beta = a \cos\left(\frac{(\pi+2m)g}{2kR}\right)$
 $= 0 \Rightarrow (0, 0)$ e $(\pm\beta, 0)$ sono coincidenti.

Come, al solito, per orientarci
facciamo un grafico riassum-
tivo come nella figura qui
a destra.



Si riconosce la classica situazione
della biforcazione a forchet-
ta di un p.to di equilibrio.

STABILE, siamo quindi portati a congettu-
re che $(0, 0)$ è stabile in corrispondenza al
"caso critico" in cui $(\pi+2m)g/(2kR) = 1$.

Per verificarlo, osserviamo che $U: \pi^2 \rightarrow \mathbb{R}$
è una funzione definita su un compatto, quindi
ammette un punto di minimo e un p.to
di massimo.

Quando $\frac{(\pi+2m)g}{2kR} = 1$, ci sono "solo"

Le p.t. stazionari:

Pag. 10

$(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$.

Dallo studio della stabilità di questi p.t. di equilibrio, emerge che $(0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$ sono o p.t. di sella o p.t. di massimo. Ne segue quindi che il p.to di minimo non può che essere $(0,0)$, che quindi è di equilibrio stabile per il th. di Laprange - Dirichlet.

(3A) Si risolvano le equazioni del moto usando il cosiddetto metodo "per quadrature".

(3B) Ci si limiti al caso in cui $M = m = g = R = l = \omega = 1$. Si individuino dei valori opportuni di k e, delle opportune condizioni iniziali, per cui $\forall$ valore $M > 0$ esistono delle piccole oscillazioni dell'asta attorno alla verticale discendente con moto periodico di periodo $> M$.

L'osservazione fondamentale | Pag. 11
 è la seguente: le 2 eq. di Lagrange
 sono separabili, nel senso che in quella che
 coinvolge θ non compare φ e viceversa. Pertanto,
 entrambe possono essere viste come un
 problema di meccanica conservativa a
 1 grado di libertà.

In dettaglio, consideriamo prima

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \text{ cioè}$$

$$\left(\frac{M}{3} + m\right) R^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{M}{2} + m\right) g R \sin \theta - k R^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$\Rightarrow$ la legge di conservazione

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m\right) R^2 \dot{\theta}^2 - \left(\frac{M}{2} + m\right) g R \cos \theta + \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \theta = E_{\theta},$$

si noti che nel membro di sinistra compaiono
 i termini cinetici e potenziali che dipendono da θ e $\dot{\theta}$.
 Ovviamente, E_{θ} è un'energia.

D'altra parte, dall'equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \text{ cioè } \frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi} + g E l \sin \varphi = 0$$

$\Rightarrow$ la legge di conservazione

$$\frac{m l^2}{3} \dot{\varphi}^2 - g E l \cos \varphi = E_{\varphi},$$

dove, nel membro di sinistra, sono raccolti i termini di energia cinetica e potenziale che dipendono da $\psi, \dot{\psi}$, mentre, nel membro di destra, E_ψ è ovviamente un'energia. Utilizzando la solita procedura (per separazione di variabili) che porta alla soluzione per quadrature di un generico problema di meccanica 1D, si ottiene

$$t - t_0 = \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{g_0 \sqrt{\frac{2}{(\frac{M}{3} + m)R^2} \left[E_0 + \left(\frac{1}{2} (1+m) \right) g R \cos \psi - \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \psi \right]}}$$

$$e \quad t - t_0 = \pm \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2}{m l^2} (E_\psi + g E l \cos \psi)}}$$

Passiamo ora a considerare i moti periodici di oscillazione attorno al semiasse discendente delle z . È evidente che quando $\psi_0 = \dot{\psi}_0 = 0$, allora la seconda eq. di Lagrange è risolta da $\psi(t) = 0$, quindi possiamo avere moti oscillatori nelle

solo 0, che saranno quindi perio | Pag. 13
dici.

Dalla soluzione del punto (2) segue che
quando $\frac{(n+2m)g}{2kR} > 1$, ~~possiamo~~ allora

$(0,0)$ è ~~periodico~~ ^{STABILE} e, quindi, possiamo avere
moti oscillatori vicino ad esso. Sostituendo
i valori dati per n, m, g, R otteniamo

$$k < \frac{3}{2} -$$

Per il teorema delle piccole oscillazioni, applica-
to alla prima eq. di Lagrange quei dintorni
di $\vartheta = 0$, otteniamo

$$\lim_{E \rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{k}{2}\right)^+} T(E_0) = 2\pi \sqrt{\frac{4/3}{\frac{3}{2} - k}} =$$
$$= 2\pi \sqrt{\frac{8}{3(3-2k)}}$$

dove abbiamo utilizzato l'espressione
generale della derivata seconda del potenziale
rispetto a ϑ , la quale si trova a pag. 5.

Il fissato $M > 0$, poniamo k in modo
tale che

$$2\pi \sqrt{\frac{8}{3(3-2k)}} = 2M \Rightarrow 3-2k = \frac{8\pi^2}{3M^2}$$

$$\rightarrow k = \frac{3}{2} - \frac{4\pi^2}{3M^2}.$$

Page 16

Per il teorema delle piccole oscillazioni,
 $\exists \varepsilon \in (0, \beta)$ tale che la corrispondente energia

$$\begin{aligned} E_0 &= -\left(\frac{1}{2}M+m\right)gR \cos \varepsilon + \frac{k}{2}R^2 \cos^2 \varepsilon \\ &= -\frac{3}{2} \cos \varepsilon + \frac{k}{2} \cos^2 \varepsilon \end{aligned}$$

è così vicino a quella del minimo del potenziale,
 cioè $-\frac{3}{2} + \frac{k}{2}$, che il corrispondente periodo
 di oscillazione disterà meno di M da

$$\lim_{E_0 \rightarrow \left(-\frac{3}{2} + \frac{k}{2}\right)^+} T(E_0) = 2M,$$

Così che avviene quando $k = \frac{3}{2} - \frac{4\pi^2}{3M^2}$, come
 abbiamo discusso in precedenza.

Ne segue che, per quel valore di k e per quel
 valore di ε , il moto che fa seguito a

$$(\theta_0 = \varepsilon, \dot{\theta}_0 = 0, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 0)$$

sarà del tipo $t \mapsto (\theta(t), \varphi(t) = 0)$ con $\theta(t)$ perio-
 dico di periodo $T\left(-\frac{3}{2} \cos \varepsilon + \frac{k}{2} \cos^2 \varepsilon\right) > M$, così come richiesto.