

Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
20 Settembre 2018

Un sistema meccanico è costituito da due aste, che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale ascendente. Entrambe le aste sono da considerarsi perfettamente rigide e con distribuzione di massa omogenea al loro interno. La prima asta è di massa M e lunghezza R ; essa ha un vertice fisso nell'origine O ed è vincolata a ruotare nel piano verticale Oyz . Si denoti con B l'altro vertice (cioè quello mobile e diverso da O) della prima asta. La seconda asta è di vertici P e Q , ha massa m e lunghezza $2l$. Essa è vincolata in modo tale da poter ruotare attorno a B che è in corrispondenza al punto medio tra P e Q stessi. Inoltre, il dispositivo vincolare è realizzato in modo da permettere rotazioni della seconda asta solo nel piano orizzontale passante per B ; detto in altri termini, durante i moti del sistema i punti B , P e Q mantengono sempre la stessa quota verticale. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il punto Q alla sua proiezione Q_* sul piano orizzontale Oxy . Inoltre, in Q è posta una carica elettrica q , che è soggetta agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a \mathcal{E} , parallelo ed equiverso all'asse delle x .

È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero M , m , R , l , k , q e \mathcal{E} , abbiano valori reali positivi. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo tale che le due aste possano attraversarsi senza scontrarsi; si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3A) Si risolvano le equazioni di Lagrange, avendo cura di applicare opportunamente il “metodo per quadrature”.
- (3B) Si studino i moti di “piccole oscillazioni” del sistema, limitatamente al caso in cui i valori di quasi tutti i parametri (eccetto k) sono fissati come segue: $M = m = g = R = l = q = \mathcal{E} = 1$. Per ogni numero reale $\mathcal{M}_* > 0$ (che si intende essere “grande a piacere”), si verifichi che esistono un valore di k e delle opportune condizioni iniziali cui fa seguito un moto *periodico* di periodo maggiore di \mathcal{M}_* .