

Primo Appello scritto di FOT1

Settembre 2018

Pag. 1

Massa disco 1 = M
 Massa disco 2 = M
 massa anello 1 = m
 massa anello 2 = m
 Centro disco 1 e anello 1 = C_1
 " " 2 " " 2 = C_2

Raggio disco 1 = raggio disco 2 = $2R$

Raggio anello 1 = raggio anello 2 = R

Dischi rotolano senza strisciare sulla guida orizzontale $y = -2R$.

Carica elettrica in P_1 = carica elettrica in P_2 = $q > 0$

Interazione elettrostatica tra le cariche in P_1 e P_2 : trascurabile

Campo elettrico costante e parallelo in ogni p.to del piano: $\vec{E} = E \hat{y}$, con $E > 0$.

Costante molla tra C_1 e C_2 = k .

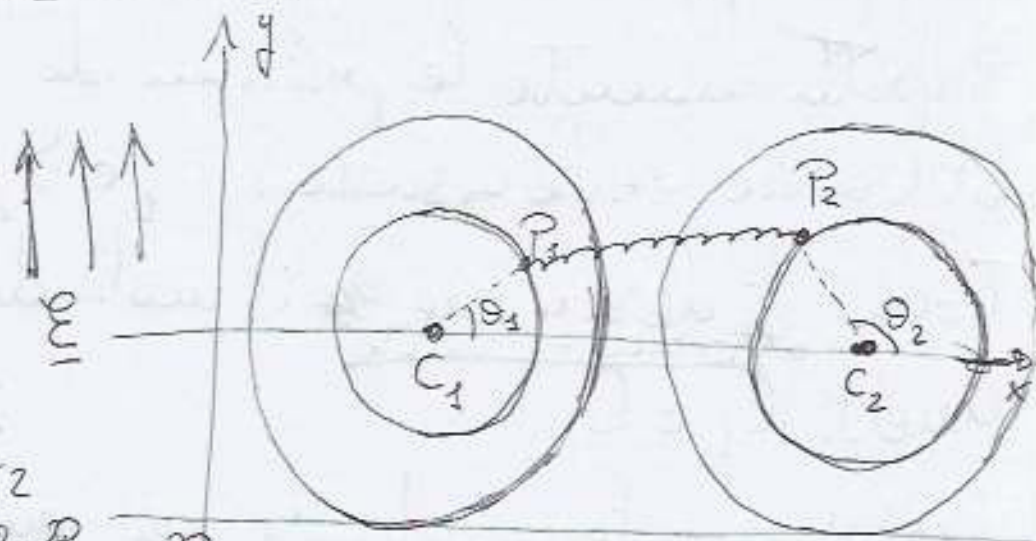
1) Lagrangiana e eq. di Lagrange

Si determinino due costanti del moto.

Scegliamo come coordinate libere o Lagrangiane

$(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$

dove x_1 e x_2 denotano l'ascissa di C_1 e C_2 , rispettivamente.



mente, mentre ϑ_1 e ϑ_2 (come indicato in figura), sono gli angoli che identificano rispettivamente le posizioni di P_1 e P_2 rispetto all'asse delle ascisse. ϑ_1 e ϑ_2 , quindi, permettono di descrivere ~~il~~ il moto di rotazione degli attorno ai centri ~~quelli~~ K_1 e C_2 .

Scriviamo le coordinate dei punti

$$C_1: (x_1, 0) \quad P_1: (x_1 + R \cos \vartheta_1, R \sin \vartheta_1)$$

$$C_2: (x_2, 0) \quad P_2: (x_2 + R \cos \vartheta_2, R \sin \vartheta_2).$$

~~e rispettivamente~~

L'energia cinetica è data dalla somma di vari contributi:

$$T = T_{\text{disco } 1} + T_{\text{disco } 2} + T_{\text{anelli } 1} + T_{\text{anelli } 2}$$

dove $T_{\text{disco } 1}$, per il teorema di König, è data da

$$T_{\text{disco } 1} = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I_M \omega_1^2,$$

dove l'inerzia $I_M = \frac{1}{2} M (2R)^2$ e la velocità angolare ω_1 soddisfa la relazione $\dot{x}_1 = -(2R) \omega_1$ che è data dal

vincolo di puro rotolamento, quindi Pag. 3

$$T_{\text{disco 1}} = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M (2R)^2 \frac{\dot{x}_1^2}{(2R)^2} = \frac{3}{4} M \dot{x}_1^2.$$

Analogamente, si ottiene che

$$T_{\text{disco 2}} = \frac{3}{4} M \dot{x}_2^2.$$

Applicando il Teorema di König al primo anello, si ottiene che

$$T_{\text{anello 1}} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I_{A1} \dot{\theta}_1^2,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che θ_1 è l'angolo che descrive la rotazione dell'anello 1 e $I_{A1} = mR^2$; ne segue che

$$T_{\text{anello 1}} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Analogamente, si ottiene che

$$T_{\text{anello 2}} = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_2^2.$$

Sommandoli tutti i contributi cinetici, si ha che

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M + m \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M + m \right) \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2).$$

Passiamo ora al calcolo dell'energia potenziale, che è data dalla somma dei seguenti contributi

$$U = -qE \left(y_{P1} + y_{P2} \right) + \frac{1}{2} k \overline{P_1 P_2}^2,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che Pag. 4
 l'energia potenziale elettrostatica ha la forma

$$-qE(y_{P_1} + y_{P_2})$$

come si può facilmente calcolare, in analogia al
 campo l'energia potenziale gravitazionale.

E' conveniente trattare separatamente il calcolo di

$$\begin{aligned}
 \overline{P_1 P_2}^2 &= [x_1 - x_2 + R(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)]^2 + R^2(\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2)^2 \\
 &= (x_1 - x_2)^2 + R^2[\cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2 + \sin^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_2 \\
 &\quad - 2(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2)] + 2R(x_1 - x_2)(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) \\
 &= (x_1 - x_2)^2 + 2R^2(1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)) + 2R(x_1 - x_2)(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)
 \end{aligned}$$

Riassumendo, possiamo scrivere l'energia potenziale

come segue:
$$U = -qER(\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2) + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 - kR^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + kR(x_1 - x_2)(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)$$

dove è stata omessa un'inessenziale costante additiva.

La lagrangiana è quindi

$$\begin{aligned}
 L(x_1, x_2, \vartheta_1, \vartheta_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}M + m \right) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) \\
 &\quad + qER(\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2) - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + kR^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - kR(x_1 - x_2)(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)
 \end{aligned}$$

Le eq. di Lagrange assumono quindi la forma seguente: Pag. 5

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \left(\frac{3M+m}{2} \right) \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + kR(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = \left(\frac{3M+m}{2} \right) \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + kR(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = mR^2 \ddot{\theta}_1 - gER \cos \theta_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + kR(x_1 - x_2) \sin \theta_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = mR^2 \ddot{\theta}_2 - gER \cos \theta_2 + kR^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - kR(x_2 - x_1) \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Si come la Lagrangiana descrive un sist. mec. con vincoli olonimi, bilateri, ideali e fissi sottoposto a forze puramente posizionali e conservative, allora si conserva l'energia totale meccanica

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{3M+m}{2} \right) (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - gER(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) + \frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 - kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + kR(x_1 - x_2) \underbrace{(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)}_{\text{...}}$$

Inoltre la Lagrangiana è evidentemente simmetrica rispetto alla famiglia di diffeomorfismi a 1 parametro

$$(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) \rightarrow (x_1 + \alpha, x_2 + \alpha, \theta_1, \theta_2),$$

dare il pivò il ruolo di parametro. Pag. 6
Per il teorema di Noether, segue immediatamente che si conserva la costante del
moto $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \left(\frac{3}{2}M + m\right)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$,

cioè la proiezione sull'asse orizzontale della
quantità di moto.

Si noti che, sommando membro a membro
le prime due equazioni di Lagrange, si ricava che
$$\left(\frac{3}{2}M + m\right)(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = \frac{d}{dt} P_x = 0$$

Cioè ~~si può~~ otteniamo per un'altra via
(che non ricorre al teorema di Noether) la conserva-
zione della quantità di moto P_x .

§2) Si consideri ora il sistema quando è sottoposto
a due ulteriori vincoli, in modo t.c. sia C_1 che C_2
stiano sempre sovrapposti all'origine. Si determi-
nino, in queste nuove condizioni, i p.t.i. di equilibrio
e se ne studi la stabilità.

La lagrangiana del sistema sottoposto ai due modi piccoli è

PAG. 7

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vartheta_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2) &= L(x_1=0, x_2=0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dot{x}_1=0, \dot{x}_2=0, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2) = \\ &= \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) + q E R (\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2) + k R^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \end{aligned}$$

Ovviamente, $\mathcal{L} = T - U$, dove la nuova energia potenziale assume la forma

$$U(\vartheta_1, \vartheta_2) = -q E R (\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2) - k R^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

Per determinare i p.t. di equilibrio, ~~de~~ dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \vartheta_1} = -q E R \cos \vartheta_1 + k R^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta_2} = -q E R \cos \vartheta_2 + k R^2 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni precedenti, otteniamo che

$$-q E R (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) = 0$$

$$\rightarrow \cos \vartheta_2 = -\cos \vartheta_1 \Rightarrow \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$$
$$\Rightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi.$$

Immettendo la relazione

Pag. 8

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

nell'eq. $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0$, si ottiene un'eq. in una sola incognita, cioè

$$-qER \cos \theta_1 + kR^2 \sin(2\theta_1 - \pi) = 0$$

$$\Rightarrow kR^2 \cos \theta_1 \left(2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \frac{qE}{kR} \right) = 0$$

$$\cos \theta_1 = 0$$

$$\theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \theta_1 = -\frac{qE}{2kR}$$

$$\theta_1 = -\beta, \pi + \beta$$

dove $\beta = \arcsin \frac{qE}{2kR}$, che è
sì $\frac{qE}{2kR} \leq 1$.

Inoltre, immettendo la relazione

$$\theta_2 = \theta_1 + \pi$$

in $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0$, otteniamo che

$$-qER \cos \theta_1 + kR^2 \sin(-\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$$

Riassumendo, abbiamo le seguenti sei configurazioni di equilibrio:

Pag. 9

$$(\theta_1, \theta_2) \in \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \right. \\ \left. (-\beta, \pi + \beta), (\pi + \beta, -\beta) \right\},$$

dove l'ultima coppia di soluzioni di quiete
è se $\frac{qER}{2kR} \leq 1$.

Al fine di determinare la stabilità dei suddetti p.t. di equilibrio, è conveniente calcolare l'Hessiano del potenziale:

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} qER \sin \theta_1 + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & -kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & qER \sin \theta_2 + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

Consideriamo separatamente i var. p.t. di equilibrio.

$$\text{— Caso } (\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Hess } U \Big|_{\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} qER + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & qER + kR^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Siccome } \det = (qER + kR^2)^2 - k^2 R^4 = q^2 E^2 R^2 + 2qEkR^3 > 0$$

e $T_2 = 2R(q\mathcal{E} + kR) > 0$, allora abbiamo Pag. 10
 due autoval. positivi $\rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è sempre STABILE.

- Caso $(\theta_1, \theta_2) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$

$$\text{Hess } U \Big|_{\theta_1 = \theta_2 = -\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -q\mathcal{E}R + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & -q\mathcal{E}R + kR^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Calcoliamo } \det \text{Hess } U \Big|_{\theta_1 = \theta_2 = -\frac{\pi}{2}} &= (-q\mathcal{E}R + kR^2)^2 - (kR^2)^2 \\ &= q^2\mathcal{E}^2R^2 - 2q\mathcal{E}kR^3 = q^2\mathcal{E}^2R^2 \left(1 - \frac{2kR}{q\mathcal{E}} \right) = 2q\mathcal{E}kR^3 \left(\frac{q\mathcal{E}}{2kR} - 1 \right) \end{aligned}$$

• Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}}{2kR} < 1$

Si come $\det < 0 \rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\rightarrow$ INSTABILE

• Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}}{2kR} > 1$

Si come $\det > 0$ e $T_2 = -2R(q\mathcal{E} - kR) < 0$, allora
 abbiamo 2 autoval. neg. $\rightarrow$ INSTABILE

• Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}}{2kR} = 1$

Si come $\det = 0$ e $T_2 = -2R(q\mathcal{E} - kR) = -2kR^2 < 0$,
 allora abbiamo 1 autoval. neg. e 1 ind. $\rightarrow$ INSTABILE.

- Caso $(\vartheta_1, \vartheta_2) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\vartheta_1 = \pi/2 \\ \vartheta_2 = -\pi/2}} = \begin{pmatrix} qER - kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & -qER - kR^2 \end{pmatrix}$$

Siccome $\det = -q^2 E^2 R^2 < 0 \rightarrow$ 1 autovel. pos. e 1 neg.
 $\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ è INSTABILE

- Caso $(\vartheta_1, \vartheta_2) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\vartheta_1 = -\pi/2 \\ \vartheta_2 = \pi/2}} = \begin{pmatrix} -qER - kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & qER - kR^2 \end{pmatrix}$$

Siccome $\det = -q^2 E^2 R^2 < 0 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è INSTABILE.

- Casi $(\vartheta_1, \vartheta_2) = (-\beta, \pi + \beta), (\pi + \beta, -\beta)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\vartheta_1 = -\beta, \pi + \beta \\ \vartheta_2 = \pi + \beta, -\beta}} = \begin{pmatrix} -qER \sin \beta \mp kR^2 \cos(2\beta) & kR^2 \cos(2\beta) \\ kR^2 \cos(2\beta) & -qER \sin \beta - kR^2 \cos(2\beta) \end{pmatrix}$$

Consideriamo dapprima la traccia (che è più semplice da calcolare):

$$T_2 = -2R \left[qE \cdot \frac{qE}{2kR} + kR^2 - 2kR \left(\frac{qE}{2kR} \right)^2 \right] = -2kR^2 < 0.$$

Siccome $T_2 < 0 \Rightarrow$ almeno 1 autovel. neg. $\Rightarrow$ INSTABILE.

(3) Si riconsideri il problema in tutta

la sua generalità, cioè senza i vincoli aggiuntivi introdotti al punto (2). Si studino i moti che fanno seguito a condizioni iniziali speculari rispetto all'asse y (cioè, al tempo $t=0$, l'ascissa di C_1 è opposta a quella di C_2 e ~~la~~ anche l'angolo che $C_1 P_1$ forma con la verticale è opposto a quello formato da $C_2 P_2$ con la verticale stessa) e tali che il sistema è inizialmente in quiete.

(3A) Si verifichi che tali moti preservano la specularità per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$.

(3B) Limitatamente al caso in cui i valori dei parametri sono i seguenti: $R=2$, $M=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{6}$, $q=E=k=1$; si studi il sistema di ^{due} equazioni differenziali in due variabili (dipendenti dal tempo) ~~in~~ ^{che} descrive il moto ~~est.~~ del sottosistema costituito dal primo disco e dal primo anello; ovviamente, questo moto è speculare a quello del secondo anello e del secondo disco. Si considerino le piccole oscillazioni del sottosistema

ottenuto al servizio delle y positive - [Pag. 13]
di linearizzare le eq. del moto.

Dopo aver notato che per la particolare struttura della parte cinetica, basta una sola trasformazione ortogonale delle coordinate per passare ai cosiddetti modi normali di oscillazione, si calcolano i due periodi delle oscillazioni da cui relative ai modi normali stessi.

le condizioni iniziali

$$(x_{10}, x_{20}, \vartheta_{10}, \vartheta_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{\vartheta}_{10}, \dot{\vartheta}_{20})$$

saranno tali che

$$\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0, \quad \dot{\vartheta}_{10} = \dot{\vartheta}_{20} = 0$$

$$x_{20} = -x_{10}, \quad \vartheta_{20} = \pi - \vartheta_{10}$$

Ci proponiamo di verificare che le leggi del moto che fanno seguito a tali condizioni iniziali sono del tipo

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) = \xi(t), & x_2(t) = -\xi(t), & \vartheta_1(t) = \varphi(t), & \vartheta_2(t) = \pi - \varphi(t) \\ \dot{x}_1(t) = \dot{\xi}(t), & \dot{x}_2(t) = -\dot{\xi}(t), & \dot{\vartheta}_1(t) = \dot{\varphi}(t), & \dot{\vartheta}_2(t) = -\dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

con $\xi(t)$ e $\varphi(t)$ funzioni opportune del tempo.

Osserviamo che, affinché le leggi del moto del tipo descritto nella pagina precedente siano soluzioni delle eq. di Lagrange, allora devono sussistere le seguenti eq.:

$$(*) \begin{cases} \left(\frac{3}{2}M+m\right)\ddot{\xi} + 2k\xi + 2kR\cos\varphi = 0 \\ -\left(\frac{3}{2}M+m\right)\ddot{\xi} - 2k\xi - 2kR\cos\varphi = 0 \\ mR^2\ddot{\varphi} - qER\cos\varphi - kR^2\sin(2\varphi) - 2k\xi\sin\varphi = 0 \\ -mR^2\ddot{\varphi} + qER\cos\varphi + kR^2\sin(2\varphi) + 2k\xi\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Si noti che la seconda di queste equazioni è equivalente alla prima e altrettanto si dice per la terza e la quarta equazione.

Restringiamoci a considerare il problema di Cauchy costituito dalle 2 eq. diff. tra loro indipendenti e che compaiono nel sistema precedente, unite alle condizioni iniziali (espresse per $\xi(0)$, $\varphi(0)$, $\dot{\xi}(0)$, $\dot{\varphi}(0)$),

$$\text{cioè } \begin{cases} \left(\frac{3}{2}M+m\right)\ddot{\xi} - 2k\xi - 2kR\cos\varphi = 0 \\ mR^2\ddot{\varphi} = qER\cos\varphi + kR^2\sin 2\varphi + 2k\xi\sin\varphi \\ \xi(0) = x_{10} \quad \dot{\xi}(0) = 0 \\ \varphi(0) = \vartheta_{10} \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

Siccome il membro di destra delle due equazioni differenziali è $\mathcal{C}^1$ (è addirittura analitico), allora $\exists$ la legge del moto

Pag 15

$$t \mapsto (\xi(t), \varphi(t))$$

che è soluzione del precedente problema di Cauchy.

È facile allora verificare che la legge del moto

$$t \mapsto (x_1(t) = \xi(t), x_2(t) = -\xi(t), \vartheta_1(t) = \varphi(t), \vartheta_2(t) = \pi - \varphi(t),$$

(II) $\dot{x}_1(t) = \dot{\xi}(t), \dot{x}_2(t) = -\dot{\xi}(t), \dot{\vartheta}_1(t) = \dot{\varphi}(t), \dot{\vartheta}_2(t) = -\dot{\varphi}(t))$

è soluzione del problema di Cauchy che si ottiene usando le eq. di Lagrange (le quali, con queste leggi del moto, si riducono al sistema (*), come abbiamo già osservato in precedenza) ~~alla~~ e le condizioni iniziali scritte immediatamente all'inizio della soluzione del punto (3).

Siccome anche quest'altro problema di Cauchy è regolare, allora la sua soluzione è unica e quindi, non può che essere (II). Ciò conclude la verifica che il moto è speculare rispetto a $y \forall t \in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la soluzione dell'eq. (3B), cominceremo a risolvere le eq. del moto che descrivono il moto del primo disco e del primo anello (usando le sole variabili che descrivono la posizione del primo disco e del primo anello), dopo aver rimpiazzato i parametri con i loro valori espliciti, cioè

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \ddot{\xi} = \ddot{\xi} = -2\xi - 4 \cos \varphi \\ \left(\frac{1}{4} \cdot 2^2 \right) \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \xi \sin \varphi \end{cases}$$

Le piccole oscillazioni sono da considerare attorno alla soluzione di equilibrio $\xi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Di conseguenza, linearizziamo le eq. facendo lo sviluppo al primo ordine, cioè

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -2\xi + 4\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \\ \ddot{\varphi} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + 8\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + 4\xi \end{cases}$$

In altri termini la linearizzazione delle equazioni del moto può essere posta nella seguente forma

$$A \ddot{\underline{q}} = -B \underline{q},$$

dove A non è altro che la matrice identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\underline{q} = (q_1, q_2) = \left(\xi, \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$, mentre la matrice B associata all'Hessiano del potenziale calcolato nel p.to di equilibrio altro non è che

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Siccome A è l'identità e B è simmetrica, allora ci basta una ^{matrice di} ~~matrice di~~ ortogonale U per introdurre nuove coordinate $\underline{Q}$ t.c. $\underline{q} = U \underline{Q}$ e

$$U \ddot{\underline{Q}} = -BU \underline{Q} \rightarrow \ddot{\underline{Q}} = -(U^T B U) \underline{Q},$$

dove $D = U^T B U$ è diagonale.

Ovviamente, la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dove λ_1 e λ_2

sono gli autovalori di B , che sono le soluzioni dell'eq. per il pol. caratteristico di B stessa, cioè

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^2 - (\text{tr } B)\lambda + \det B = \lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 4} = 6 \pm 4\sqrt{2}.$$

Siccome, per costruzione, le eq. diff. $\ddot{Q}_1 = -\lambda_1 Q_1$ e $\ddot{Q}_2 = -\lambda_2 Q_2$ sono quelle che descrivono i modi normali di oscillazione, i periodi ad essi associati sono $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}}$ e $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}}$.