Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
11 Settembre 2018

Un sistema meccanico è costituito da due dischi e da due anelli, che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $0xy$, con asse delle y verticale ascendente. Tutti e quattro questi corpi sono da considerarsi perfettamente rigidi e con distribuzione di massa omogenea al loro interno. Entrambi i dischi sono di massa M e raggio uguale a $2R$; inoltre, essi rotolano senza strisciare su una guida rettilinea e orizzontale posta in corrispondenza all'ordinata $y = -2R$. I simboli C_1 e C_2 denotano, rispettivamente, i centri dei due dischi. Entrambi gli anelli sono di massa m e raggio R, anch'essi hanno centro, rispettivamente, in C_1 e C_2; inoltre, ciascuno di essi è libero di ruotare attorno al suo centro. Si tenga presente che il moto di rotazione degli anelli non è in alcun modo vincolato a quello di rotolamento puro dei dischi. Due punti P_1 e P_2 , entrambi di massa trascurabile, sono solidali rispettivamente al primo e al secondo anello. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P_1 a P_2 . Sia P_1 che P_2 sono dotati di carica elettrica q, che è soggetta *solamente* (per capire il senso di questo avverbio, si veda la frase seguente) agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo all'asse delle ordinate y e diretto con verso ascendente. Si assuma che siano trascurabili gli effetti indotti dalla repulsione dovuta all'interazione elettrostatica tra le due cariche poste in P_1 e P_2, così come le forze di Lorentz agenti su ciascuna delle due cariche e dovute al campo magnetico generato dall'altra di queste due cariche.

È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero m , M , R , k , q e $\mathcal{E}$, abbiano valori reali positivi. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo tale gli anelli e i dischi possano attraversarsi senza scontrarsi; si risponda alle domande seguenti.

(1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange. Si determinino due costanti del moto indipendenti l'una dall'altra.

(2) Si consideri ora il sistema quando è soggetto a due ulteriori vincoli ideali, realizzati in modo tale che entrambi i centri C_1 e C_2 stiano sempre sovrapposti all'origine O. In queste nuove condizioni, si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.

(3) Si rimuovano ora i vincoli descritti al punto (2) e si riconsideri il sistema meccanico in tutta la sua generalità, così come descritto all'inizio

del testo. Si studi il moto che fa seguito alle condizioni iniziali tali che, al tempo $t = 0$, le posizioni di dischi e anelli sono *speculari* rispetto all'asse delle ordinate e tutti e quattro questi corpi rigidi sono in quiete. Nell'ambito di questo problema, diciamo che le posizioni sono speculari se, a un certo istante, sono verificate le due seguenti condizioni: (I) l'ascissa di C_1 è opposta a quella di C_2 ; (II) l'angolo formato dal segmento C_1P_1 con la semiretta verticale ascendente e uscente da C_1 è opposto al corrispondente angolo formato da C_2P_2 con la verticale ascendente stessa.

(3A) Si verifichi il moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali è tale che ad ogni istante di tempo $t \in \mathbf{R}$, le posizioni di dischi e anelli sono *speculari* rispetto all'asse delle ordinate.

(3B) Limitatamente al caso in cui i valori dei parametri sono i seguenti: $R = 2$, $M = 1/2$, $m = 1/4$, $k = q = \mathcal{E} = 1$, si studi il sistema di due equazioni differenziali in due variabili (dipendenti dal tempo) che descrive il moto del sottosistema costituito dal primo disco e dal primo anello; ovviamente, per quanto è stato chiesto di dimostrare al punto (3A), questo moto è speculare a quello del secondo disco e del secondo anello.

Si considerino le piccole oscillazioni di tale sottosistema attorno al semiasse delle ordinate positive. Si linearizzino le equazioni del moto. Dopo aver notato che, per la particolare struttura dei contributi alle equazioni del moto che sono dovuti alla parte cinetica, basta una sola trasformazione ortogonale delle coordinate per passare ai cosiddetti modi normali di oscillazione, si calcolino i due periodi delle oscillazioni relative ai modi normali stessi.