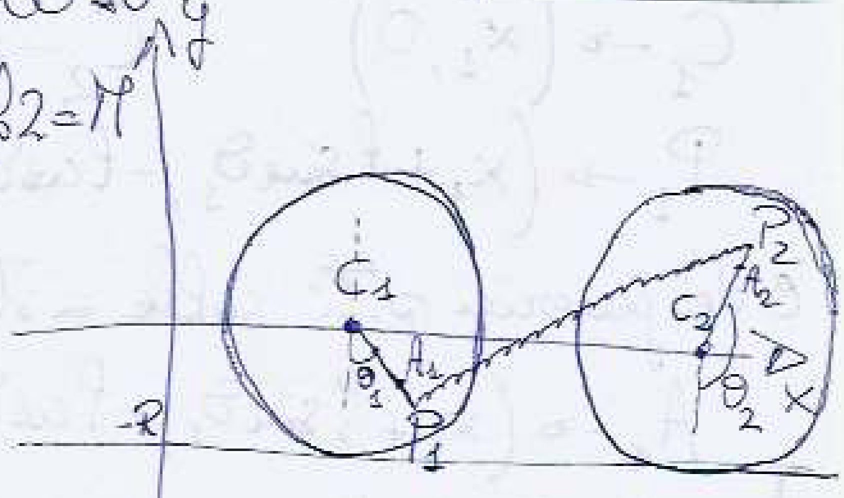
Secondo appello scritto di FM1 - Luglio 2018

Massa anello 1 = massa anello 2 = M

$\overline{C_1P_1} = \overline{C_2P_2} = \ell = R$

raggio anello 1 = raggio anello 2 = R

massa asta 1 = massa asta 2 = $m = 2M$



Costante molla tra P_1 e P_2 = k -

Entrambi gli anelli rotolano senza strisciare -

—— o ——

1) Lagrangiana e eq. di Lagrange.
Si determinino le costanti del moto -

—— o ——

Scegliamo come coordinate libere o lagrangiane:

$$(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$$

dove x_1 e x_2 denotano l'ascissa di C_1 e C_2, rispettivamente, mentre θ_1 e θ_2 sono gli angoli formati dalle aste con le semirette verticali discendenti, ~~passo~~ uscenti da C_1 e C_2, così come in figura

È utile scrivere le coordinate dei punti:

$$C_1 \to (x_1, 0) \qquad C_2 \to (x_2, 0)$$

$$P_1 \to (x_1 + l\sin\vartheta_1, -l\cos\vartheta_1) \qquad P_2 \to (x_2 + l\sin\vartheta_2, -l\cos\vartheta_2)$$

e dei generici p.ti sulle aste

$$A_1 \to (x_1 + \rho\sin\vartheta_1, -\rho\cos\vartheta_1) \qquad A_2 \to (x_2 + \rho\sin\vartheta_2, -\rho\cos\vartheta_2),$$

dove ρ è la distanza di A_1 [A_2] dal centro C_1 [C_2].

Scriviamo anche le rispettive velocità:

$$\underline{v}_{C_1} = (\dot{x}_1, 0), \quad \underline{v}_{C_2} = (\dot{x}_2, 0)$$

$$\underline{v}_{P_1} = (\dot{x}_1 + l\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1, l\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1) \qquad \underline{v}_{P_2} = (\dot{x}_2 + l\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2, l\dot{\vartheta}_2\sin\vartheta_2)$$

$$\underline{v}_{A_1} = (\dot{x}_1 + \rho\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1, \rho\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1) \qquad \underline{v}_{A_2} = (\dot{x}_2 + \rho\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2, \rho\dot{\vartheta}_2\sin\vartheta_2).$$

È piuttosto facile calcolare l'energia cinetica degli anelli; ad esempio, abbiamo

$$T_{anello_1} = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2,$$

dove $I_1 = MR^2$ e φ_1 è l'angolo di rotazione associato al moto di rotolamento puro, quindi vale la relazione $\dot{x}_1 = -R\dot{\varphi}_1$, ne segue che

$$T_{anello_1} = \frac{1}{2} M\dot{x}_1 + \frac{1}{2} M\cancel{R^2} \frac{\dot{x}_1^2}{\cancel{R^2}} = M\dot{x}_1^2 .$$

Analogamente, abbiamo che

$$T_{anello_2} = M\dot{x}_2^2 .$$

Il calcolo dell'energia cinetica delle aste è un po' più laborioso. Sia δ la densità (omogenea) delle aste, cioè $\delta = m/\ell$; abbiamo allora che

$$T_{asta\,1} = \frac{1}{2}\delta \int_0^\ell d\rho \left(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \rho \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1 + \rho^2 \dot{\vartheta}_1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\delta \ell \dot{x}_1^2 + \frac{\delta \ell^2}{2} \dot{x}_1 \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1 + \frac{1}{6}\delta \ell^3 \dot{\vartheta}_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m\ell \dot{x}_1 \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1 + \frac{1}{6} m\ell^2 \dot{\vartheta}_1^2$$

e, analogamente,

$$T_{asta\,2} = \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m\ell \dot{x}_2 \dot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2 + \frac{1}{6} m\ell^2 \dot{\vartheta}_2^2 .$$

Sommando tutti i contributi, possiamo finalmente scrivere l'energia cinetica totale:

$$T = M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \frac{1}{2} m\ell\left(\dot{x}_1 \dot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1 + \dot{x}_2 \dot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2\right)$$

$$+ \frac{1}{6} m\ell^2 \left(\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2\right)$$

Passiamo al calcolo dell'energia ~~cinetica~~ potenziale, che è data dalla somma dei seguenti contributi

$$U = mg\left(y_{B_1} + y_{B_2}\right) + \frac{1}{2} k \overline{P_1 P_2}^2 ,$$

dove B_1 e B_2 sono rispettivamente i baricentri delle due aste; quindi

$$y_{B_1} = y_{P_1}/2 = -\frac{l}{2}\cos\vartheta_1 \; , \; y_{B_2} = -\frac{l}{2}\cos\vartheta_2 -$$

Inoltre,

$$\overline{P_1 P_2}^2 = \left[x_1 - x_2 + l\left(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2\right)\right]^2 + l^2\left(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2\right)^2$$

$$= \left(x_1 - x_2\right)^2 + l^2\left(\sin^2\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_2 - 2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\right) + 2l\left(x_1 - x_2\right)\left(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2\right) + l^2\left(\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 - 2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\right) =$$

$$= \left(x_1 - x_2\right)^2 + 2l^2\left(1 - \cos\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right)\right) + 2l\left(x_1 - x_2\right)\left(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2\right)$$

Ne segue che

$$U = -mg\frac{l}{2}\left(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\right) + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 - kl^2\cos\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) + kl\left(x_1 - x_2\right)\left(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2\right)$$

Siamo quindi pronti per scrivere la lagrangiana:

$$L = 2M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + MR\left(\dot{x}_1\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 + \dot{x}_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2\right)$$
$$+ \frac{MR^2}{3}\left(\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2\right) + MgR\left(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\right) - \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2$$
$$+ kR^2\cos\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) - kR\left(x_1 - x_2\right)\left(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2\right),$$

dove sono state omesse delle costanti additive non significative e ~~???~~ sono state effettuate le sostituzioni $m = 2M$ e $l = R$. Infine, le eq. di Lagrange assumono la forma seguente:

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4M\ddot{x}_1 + MR\ddot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 - MR\dot{\vartheta}_1^2\sin\vartheta_1 \\
\qquad + k\left(x_1 - x_2\right) + kR\left(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2\right) = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4M\ddot{x}_2 + MR\ddot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 - MR\dot{\vartheta}_2^2\sin\vartheta_2 \\
\qquad + k\left(x_2 - x_1\right) + kR\left(\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\right) = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta_1} = MR\ddot{x}_1\cos\vartheta_1 - \cancel{MR\dot{x}_1\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1} + \dfrac{2MR^2}{3}\ddot{\vartheta}_1 \\
\qquad + \cancel{MR\dot{x}_1\dot{\vartheta}_1\sin\vartheta_1} + MgR\sin\vartheta_1 + kR^2\sin\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) \\
\qquad + kR\left(x_1 - x_2\right)\cos\vartheta_1 = 0 \\
\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta_2} = MR\ddot{x}_2\cos\vartheta_2 + 2MR^2\ddot{\vartheta}_2/3 + MgR\sin\vartheta_2 + kR^2\sin\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right) \\
\qquad + kR\left(x_2 - x_1\right)\cos\vartheta_2 = 0
\end{cases}$$

Determiniamo ora le costanti del moto del sistema.
La più ovvia è l'energia totale (siccome la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo), cioè

$$E = T + U = 2M\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + MR\left(\dot{x}_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{x}_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) + \frac{MR^2}{3}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - MgR\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) - \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + kR^2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) - kR\left(x_1 - x_2\right)\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)$$

La seconda è un po' meno ovvia. Si deve innanzitutto osservare che la lagrangiana è invariante rispetto alla simmetria

$$\varphi_\alpha\left(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2\right) = \left(x_1 + \alpha, x_2 + \alpha, \theta_1, \theta_2\right),$$

quindi (per il teorema di Noether) si conserva la quantità

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \varphi_{\alpha;1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \varphi_{\alpha;2}}{\partial \alpha} = 4M\left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right) + MR\left(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2\right),$$

che è stato chiamato P_x perché è la quantità di moto totale sull'asse delle x. Un modo alternativo per dedurre che P_x è una costante del moto è fare la somma delle prime due eq. di Lagrange (perché si elidono parecchi termini) e osservare che

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} =$$

$$= 4M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + MR(\ddot{\vartheta}_1 \cos\vartheta_1 + \ddot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2)$$

$$- MR(\dot{\vartheta}_1^2 \sin\vartheta_1 + \dot{\vartheta}_2^2 \sin\vartheta_2) = \frac{d}{dt} P_x .$$

---

(2) Si consideri ora il sistema quando è sottoposto a due ulteriori vincoli, in modo t.c. sia C_1 che C_2 stiano sempre sovrapposti all'origine. Si determinino, in queste nuove condizioni i p.ti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

---

la nuova lagrangiana del (nuovo) sistema è ora

$$\mathcal{L}(\vartheta_1, \vartheta_2, \dot\vartheta_1, \dot\vartheta_2) = \frac{MR^2}{3}\left(\dot\vartheta_1^2 + \dot\vartheta_2^2\right) + MgR\left(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\right) + kR^2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

dove la nuova energia potenziale è

$$U = -MgR\left(\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2\right) - kR^2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

quindi i p.ti di equilibrio sono tutte e sole le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_1} = MgR\sin\vartheta_1 + kR^2\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_2} = MgR\sin\vartheta_2 + kR^2\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0 \end{cases}$$

Dalla ~~prima~~ somma delle due equazioni segue che $\sin\vartheta_1 = -\sin\vartheta_2 \rightarrow \vartheta_1 = -\vartheta_2$

$$\Rightarrow \vartheta_1 = \pi + \vartheta_2 .$$

Immettendo (a turno) una delle ultime due equazioni nella seconda del sistema iniziale (cioè $\frac{\partial U}{\partial \vartheta_2} = 0$), ricaviamo

$$MgR \sin\vartheta_2 + kR^2 \sin 2\vartheta_2 = 0 \quad \text{oppure} \quad MgR \sin\vartheta_2 = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$2kR^2 \sin\vartheta_2 \left(\cos\vartheta_2 + \frac{Mg}{2kR}\right) = 0 \qquad\qquad \vartheta_2 = 0, \pi$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\vartheta_2 = 0, \pi \qquad \vartheta_2 = \pm\beta \ \text{con}\ \beta = \arccos\left(\frac{-Mg}{2kR}\right) \qquad \vartheta_1 = \pi, 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\vartheta_1 = 0, \pi \qquad \vartheta_1 = \mp\beta \qquad \exists \ \text{sse}\ \frac{Mg}{2kR} \leq 1.$$

Riassumendo, abbiamo i seguenti p.ti di equilibrio

$$(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \{(0,0), (\pi,\pi), (0,\pi), (\pi,0), (\pm\beta, \mp\beta)\},$$

dove l'ultima coppia di p.ti di equilibrio $\exists$ sse $Mg/(2kR) \leq 1$.

Al fine di determinare la stabilità dei p.ti di equilibrio è conveniente scrivere l'Hessiano del potenziale:

$$\text{Hess}\, U = \begin{pmatrix} MgR\cos\theta_1 + kR^2\cos(\theta_1-\theta_2) & -kR^2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ -kR^2\cos(\theta_1-\theta_2) & MgR\cos\theta_2 + kR^2\cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$$

- Caso $\theta_1 = \theta_2 = 0$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\theta_1=\theta_2=0} = \begin{pmatrix} MgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & MgR + kR^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = M^2g^2R^2 + 2kMgR^3 > 0$, $Tr = 2(MgR + kR^2) > 0$

$\Rightarrow$ 2 autoval. pos $\Rightarrow$ STABILE

- Caso $\theta_1 = \theta_2 = \pi$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\theta_1=\theta_2=\pi} = \begin{pmatrix} -MgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & -MgR + kR^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = MgR^2(Mg-2kR) \gtreqless 0$

quando $\frac{Mg}{2kR} \gtreqless 1$.

- Sottocaso $\frac{Mg}{2kR} < 1$:

siccome $\det < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. neg. $\Rightarrow$ INST.

- Sottocaso $\frac{Mg}{2kR} \geq 1$:

siccome $Tr = -R(Mg - kR^{\cancel{2}}) \cdot 2 < -2kR < 0$

$\Rightarrow$ 2 autoval. neg. (o 1 neg. e 1 nullo) $\Rightarrow$ INSTABILE.

– Caso $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta_1=0\\ \theta_2=\pi}} = \begin{pmatrix} +MgR - kR^2 & +kR^2 \\ +kR^2 & -MgR - kR^2 \end{pmatrix}$$

$\det = -M^2g^2R^2 + \cancel{k^2R^4} - k^2R^4 < 0$, $Tr = -2kR^2$

$\Rightarrow$ 2 autoval. neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

- Caso $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\theta_1=\pi\\ \theta_2=0}} = \begin{pmatrix} -MgR - kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & MgR - kR^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det < 0$, $\mathrm{Tr} < 0 \Rightarrow$ INSTABILE

- Caso $(\theta_1, \theta_2) = (\pm\beta, \mp\beta)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\theta_1=\pm\beta\\ \theta_2=\mp\beta}} = \begin{pmatrix} MgR\cos\beta + kR^2\cos 2\beta & -kR^2\cos 2\beta \\ -kR^2\cos 2\beta & MgR\cos\beta + kR^2\cos 2\beta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~det~~ $\mathrm{Tr} = 2R\left[\cancel{Mg\left(-\frac{Mg}{2kR}\right)} \cancel{+2kR^2\frac{M^2g^2}{4k^2R^2}} - kR\right]$

$= -4kR^2 < 0 \Rightarrow$ almeno 1 autoval. neg. $\Rightarrow$ INSTABILI

(3) Si riconsideri il problema descritto in tutta la sua generalità, come all'inizio. Si studi il moto che fa seguito a condizioni iniziali t.c. il sistema a $t=0$ è in quiete, con i 2 anelli sovrapposti con i centri nell'origine e le 2 aste anch'esse sovrapposte in modo che giacciano nel quarto quadrante, formando un angolo di 30 gradi con la semiretta delle y negative.

(3A) Si scriva un'eq. diff. in una sola incognita, in modo da descrivere il la rotazione delle aste.

(3B) Si stimi il periodo T del moto, determinando esplicitamente due valori T_- e T_+ tali che l'errore relativo $\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \leq 50\%$.

E' piuttosto naturale pensare che sia i due anelli (identici tra loro) che le

due aste (a loro volta identiche tra loro). Staranno sovrapposte ad ogni istante di tempo $t \in \mathbb{R}$.
Per verificare questa congettura cerchiamo soluzioni rappresentate dalla legge del moto del tipo:

$$t \longmapsto \left(x_1(t) = \xi(t),\ x_2(t) = \xi(t),\ \vartheta_1(t) = \varphi(t),\ \vartheta_2(t) = \varphi(t) \right)$$

Affinché una tale legge del moto sia soluzione delle eq. di Lagrange debbono essere soddisfatte le seguenti eq.:

$$(*)\begin{cases} 4M\ddot{\xi} + MR\ddot{\varphi}\cos\varphi - MR\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 & (\Leftarrow \text{dalla } 1^a \text{ e } 2^a \text{ eq. di } L.) \\ MR\ddot{\xi}\cos\varphi + \frac{2}{3}MR^2\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi = 0 & (\Leftarrow \text{dalla } 3^a \text{ e } 4^a) \end{cases}$$

Si noti che è scomparso ogni effetto indotto dalla molla, perché essendo le aste sovrapposte la sua elongazione è sempre nulla.
Come al solito la verifica che una tale legge del moto (corrispondente alla situazione

ne cui anelli e aste stanno sempre sovrapposti $\forall t$) richiede un'opportuna applicazione del teorema di $\exists !$ delle soluzioni di un problema di Cauchy regolare.

Infatti, siccome il sistema di eq. (*) può essere posto in forma normale (la corrispondente matrice cinetica è invertibile) ed è evidentemente almeno C^1, allora $\exists$ la soluzione $t \mapsto (\xi(t), \varphi(t))$ del problema di Cauchy formato dalle eq. (*) e dalle cond. iniz. ($\xi(0)=0$, $\varphi(0)=\frac{\pi}{6}$, $\dot\xi(0)=0$, $\dot\varphi(0)=0$).

Quella legge del moto estesa a le variabili in modo t.c.

$$t \mapsto \left(x_1(t)=\xi(t),\ x_2(t)=\xi(t),\ \theta_1(t)=\varphi(t),\ \theta_2(t)=\varphi(t)\right)$$

è soluzione del problema di Cauchy costituito dalle eq. di Lagrange, completate dalle

Condizioni iniziali

$$x_1(0)=x_2(0)=0,\ \vartheta_1(0)=\vartheta_2(0)=\pi/6,$$

$$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0,\ \dot{\vartheta}_1(0)=\dot{\vartheta}_2(0)=0.$$

Siccome anche in questo caso, le eq. di Lagrange possono essere poste in forma normale con una funzione regolare che è nel membro di destra delle eq. diff., allora vale anche l'unicità. Di conseguenza, quella che abbiamo trovato è la (unica) soluzione del problema di Cauchy relativo alle eq. di Lagrange.

Ripartiamo dal sistema di eq. (*), la cui prima eq. può evidentemente essere scritta nella forma seguente:

$$4M\ddot{\xi}+MR\ddot{\varphi}\cos\varphi-MR\dot{\varphi}^2\sin\varphi=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(4M\dot{\xi}+MR\dot{\varphi}\cos\varphi\right)=0$$

Si conserva quindi la costante del moto

$$p=4M\dot{\xi}+MR\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

che (non a caso) è la metà della componente orizzontale della quantità di moto totale quando $\theta_1 = \theta_2 = \varphi$ e $x_1 = x_2 = \xi$.

Il sistema (*) ha un'evidente struttura lagrangiana (ereditata dal problema completo), quindi (*) deriva dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(\xi, \varphi, \dot\xi, \dot\varphi) = 2M\dot\xi^2 + MR\dot\xi\dot\varphi\cos\varphi + \frac{1}{3}MR^2\dot\varphi^2 + MgR\cos\varphi$$

dove l'unico termine potenziale è nella seconda riga dell'equazione. Di conseguenza, si conserva l'energia

$$\mathcal{E} = 2M\dot\xi^2 + MR\dot\xi\dot\varphi\cos\varphi + \frac{1}{3}MR^2\dot\varphi^2 - MgR\cos\varphi$$

Siccome al tempo $t=0$ abbiamo che $\dot\xi(0) = 0$ e $\dot\varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow P = 4M\dot\xi + MR\dot\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \dot\xi = -\frac{R\dot\varphi\cos\varphi}{4}.$$

Immettendo quest'ultima relazione nell'energia abbiamo che

$$\frac{1}{8}MR^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi - \frac{M}{4}R^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}MR^2\dot\varphi^2 - MgR\cos\varphi = \mathcal{E}$$

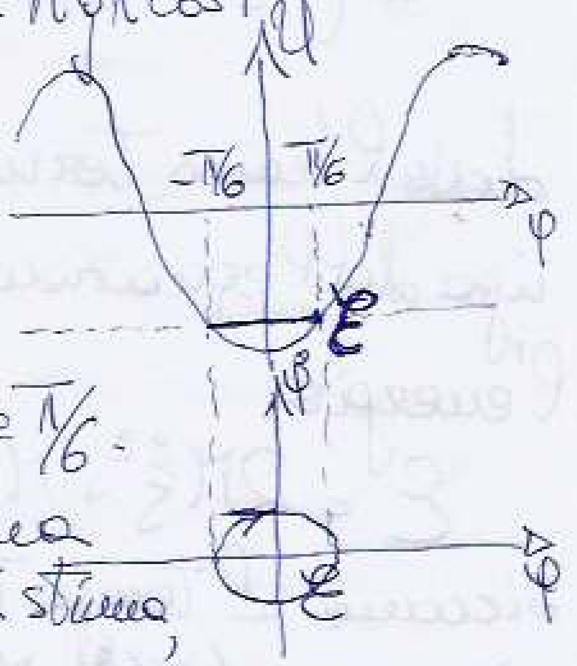
Possiamo quindi riscrivere la conservazione dell'energia nel modo seguente

$$\frac{1}{2}\mu(\varphi)R^2\dot{\varphi}^2+U(\varphi)=\mathcal{E},$$

dove la cosiddetta massa variabile è

$$\mu(\varphi)=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cos^2\varphi\right)M$$

e il potenziale è $U(\varphi)=-MgR\cos\varphi$



Essendo il potenziale del tipo del pendolo, si ricava immediatamente che il moto è periodico e l'orbita è confinata tra $-\frac{\pi}{6}$ e $\pi/6$.
Possiamo quindi utilizzare una piccola variazione della solita stima, cioè

$$\sqrt{\frac{\mu(0)R^2}{U''(0)}}=\sqrt{\frac{\min_{\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi/6\right]}\mu(\varphi)R^2}{\max_{\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi/6\right]}U''(\varphi)}}\leq\frac{T}{2\pi}\leq\sqrt{\frac{\max_{\varphi\in[-\pi/6,\pi/6]}\mu(\varphi)R^2}{\min_{\varphi\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]}U''(\varphi)}}=\sqrt{\frac{\mu(\pi/6)R^2}{U''(\pi/6)}}$$

$$\Rightarrow T_-=2\pi\sqrt{\frac{5R}{12g}},\quad T_+=2\pi\sqrt{\frac{23R}{24\sqrt{3}g}}\Rightarrow\frac{T_+-T_-}{T_++T_-}=\frac{\sqrt{\frac{23}{24\sqrt3}}-\sqrt{\frac{5}{12}}}{\sqrt{\frac{23}{24\sqrt3}}+\sqrt{\frac{5}{12}}}\simeq 0.07<50\%$$