

Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
24 Luglio 2018

Un sistema meccanico è costituito da due anelli e da due aste, che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $0xy$, con asse delle y verticale ascendente. Tutti e quattro questi corpi sono da considerarsi perfettamente rigidi e con distribuzione di massa omogenea al loro interno. Entrambi gli anelli sono di massa M e raggio R ; inoltre, essi rotolano senza strisciare su una guida rettilinea e orizzontale posta in corrispondenza all'ordinata $y = -R$. I simboli C_1 e C_2 denotano, rispettivamente, i centri dei due anelli. Entrambe le aste sono di massa $2M$ e lunghezza R . Ognuna di esse ha un primo vertice in corrispondenza al centro di un anello, mentre siano P_1 e P_2 i nomi, rispettivamente, del secondo vertice di ciascuna delle due aste. Il punto P_1 , quindi, è sovrapposto alla circonferenza formata dal primo anello, mentre P_2 giace sul secondo anello; ciò nonostante, si tenga presente che il moto delle aste non è in alcun modo vincolato a quello di rotazione degli anelli. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P_1 a P_2 . Si supponga che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo tale gli anelli e le aste possano attraversarsi senza scontrarsi; si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange. Si determinino due costanti del moto indipendenti l'una dall'altra.
- (2) Si consideri ora il sistema quando è soggetto a due ulteriori vincoli ideali, realizzati in modo tale che entrambi i centri C_1 e C_2 stiano sempre sovrapposti all'origine O . In queste nuove condizioni, si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si rimuovano ora i vincoli descritti al punto (2) e si riconsideri il sistema meccanico in tutta la sua generalità, così come descritto all'inizio del testo. Si studi il moto che fa seguito alle condizioni iniziali tali che, al tempo $t = 0$, tutti e quattro i corpi rigidi sono in quiete, con i centri C_1 e C_2 istantaneamente sovrapposti all'origine O , mentre pure le due aste sono poste in coincidenza, in modo tale che entrambe giacciono nel quarto quadrante formando un angolo di 30 gradi con la semiretta delle ordinate negative.
- (3A) Tenendo conto delle evidenti simmetrie delle condizioni iniziali, si utilizzi una delle costanti del moto, in modo da scrivere un'equazione differenziale del moto in una sola variabile incognita, la quale de-

scriverà la giacitura delle aste rispetto alla verticale e, quindi, il moto di rotazione delle aste stesse.

- (3B) Facendo attenzione al cosiddetto problema della “massa variabile”, si dia una stima del periodo T del moto che fa seguito alle condizioni iniziali descritte al precedente punto (3A). A questo scopo, si determinino *esplicitamente* due numeri reali positivi T_- e T_+ tali che $T_- \leq T \leq T_+$ con un errore relativo sulla stima, calcolato utilizzando la formula $(T_+ - T_-)/(T_+ + T_-)$, che sia inferiore al 50%.