

Esame scritto di FMI
Data del 2 Luglio 2018

massa $P = m$, massa anello M

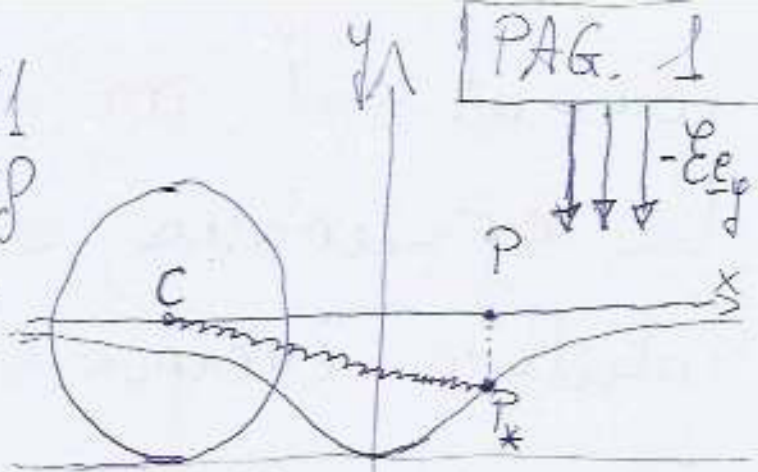
raggio anello $= R$

guida su cui ~~rotola~~ (senza strisciare) l'anello: $y = -R$

massa $P_* = 0$, $P_* P \perp$ asse x , P_* su curva $y = -R e^{-x^2/R^2}$

Costante molla tra C e P_* $= k$.

Carica in $P_* = q$, Campo elettrico $= -E \underline{e}_y$ con E costante



(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange

Adottiamo come coordinate libere o lagrangiane, la coppia ξ, x ,

che sono rispettivamente le ascisse di C e di P .

Coordinate $C : (\xi, 0)$ velocità $C : (\dot{\xi}, 0)$

" $P : (x, 0)$ " $P : (\dot{x}, 0)$

" $P_* : (x, -R e^{-x^2/R^2})$

Come al solito, per poter scrivere la lagrangiana, dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica e quella potenziale.

Pag. 2

Per quanto riguarda l'energia cinetica, abbiamo che

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{\dot{\xi}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

dove abbiamo sfruttato due fatti ben noti del moto di rotolamento puro dell'anello:

La velocità angolare ω della rotazione rispetto al baricentro è tale che $\dot{\xi} = -R\omega$ e l'inerzia dell'anello è $I = MR^2$.

Per quanto riguarda l'energia potenziale, abbiamo che

$$U = \frac{1}{2} k \overline{CP_*}^2 + q \mathcal{E} \varphi_{P_*}$$

$$= \frac{1}{2} k \left[(\xi - x)^2 + R^2 e^{-2x/R} \right] + q \mathcal{E} R e^{-x/R}$$

Possiamo quindi scrivere la
lagrangiana

Pag. 3

$$L = M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (\xi - x)^2 + R^2 e^{-2x^2/R^2} + q E x e^{-x^2/R^2}$$

e le eq. di Lagrange:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} &= 2M \ddot{\xi} + k(\xi - x) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= m \ddot{x} + k(x - \xi) - 2x e^{-2x^2/R^2} + \frac{2qEx}{R} e^{-x^2/R^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

(2) Punti di equilibrio e stabilità

Per determinare i punti di equilibrio,
dobbiamo risolvere il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= k(\xi - x) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= k(x - \xi) - 2x e^{-2x^2/R^2} + \frac{2qEx}{R} e^{-x^2/R^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

Dalla prima equazione di
Lagrange segue che

$$\xi = x.$$

Immettendo quest'ultima relazione nella
seconda equazione di Lagrange, otteniamo
che

$$2x e^{-x^2/R^2} \left(-k e^{-x^2/R^2} + \frac{qE}{R} \right) = 0$$

$$\begin{array}{c} \triangle \\ x=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \triangle \\ e^{-x^2/R^2} = \frac{qE}{kR} \Rightarrow e^{x^2/R^2} = \frac{kR}{qE} \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \pm R \sqrt{\ln\left(\frac{kR}{qE}\right)}$$

Queste 2 soluzioni $\exists$ se
 $\frac{kR}{qE} \geq 1$.

Riassumendo abbiamo tre possibili
configurazioni di equilibrio:

$$(\xi, x) \in \{(0, 0), (\eta, \eta), (\eta, -\eta)\}, \text{ dove abbiamo}$$

posto. $\eta = R \sqrt{\log\left(\frac{kR}{g\varepsilon}\right)}$.

Pag. 5

Come già detto, le ultime 2 soluzioni di quiete $\exists$ sse $\frac{kR}{g\varepsilon} > 1$.

Al fine di discutere la stabilità, calcoliamo

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k + 2k\left(\frac{4x^2}{R^2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x^2/R^2} + \frac{2g\varepsilon}{R}\left(1 - \frac{2x^2}{R^2}\right)e^{-x^2/R^2} \end{pmatrix}$$

Consideriamo separatamente i vari casi

- Caso $(\xi, x) = (0, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\xi=x=0} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & -k + \frac{2g\varepsilon}{R} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ x=0}} = -2k^2 + \frac{2g\varepsilon k}{R} = 2k^2 \left(\frac{g\varepsilon}{kR} - 1 \right)$$

• Sottocaso $\frac{g\varepsilon}{kR} > 1$

Si come $\det > 0$ e $T_2 = \frac{2g\varepsilon}{R} > 0$, allora 2 aut. pos.

$\Rightarrow (0,0)$ è p.to di equil. STABILE

Pag. 6

• Sottocaso $\frac{qE}{kR} = 1$

Siccome $\det = 0$ e $\text{Tr} = \frac{2qE}{R} > 0$, allora
1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ occorre un
supplemento di indagine.

• Sottocaso $\frac{qE}{kR} < 1$

Siccome $\det < 0$, allora 1 autoval. pos.
e 1 neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE.

- Casi $(\xi, x) = (\pm\eta, \pm\eta)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\xi=x=\pm\eta} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k + 2k \left(\frac{4 \log \frac{kR}{qE} - 1}{\frac{qE}{kR}} \right) \left(\frac{qE}{kR} \right)^2 + \frac{2qE}{R} \left(1 - 2 \log \frac{kR}{qE} \right) \frac{qE}{kR} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess } U \Big|_{\xi=x=\pm\eta} = -\cancel{2k^2} + 2 \left(\frac{qE}{kR} \right)^2 2 \log \frac{kR}{qE}$$

• Sottocaso $\frac{qE}{kR} < 1$

allora $\frac{kR}{qE} > 1 \Rightarrow \log \frac{kR}{qE} > 0$

$\Rightarrow \det > 0$ e, siccome l'el. diagonale $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = k > 0$,

$\Rightarrow$ 2 autovel. pos. $\Rightarrow$ p.t. di equil. STABILI.

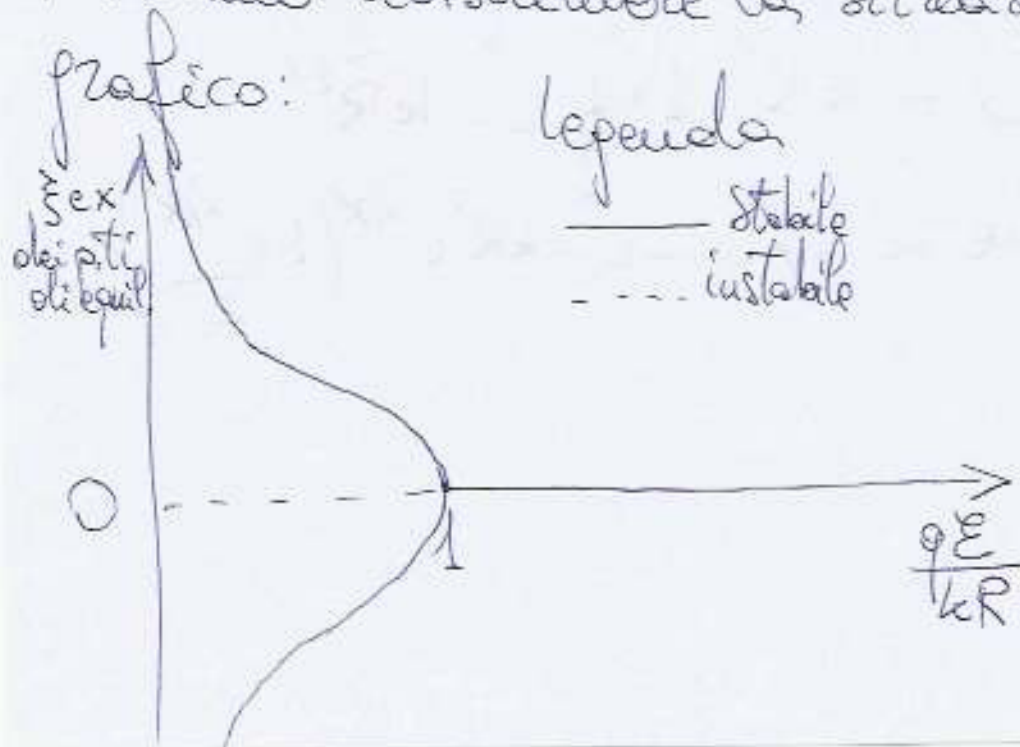
• Sottocaso $\frac{qE}{kR} = 1$

$$\text{Hess } U \Big|_{\xi=x=\pm\eta} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k + 2k(-1) + 2k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = 0$ e $T_2 = 2k > 0 \Rightarrow$ 1 autovel. pos. e 1

nulla $\Rightarrow$ occorre un supplemento di indagine

Possiamo riassumere la situazione con il seguente grafico:



legenda
 — stabile
 - - - instabile

Riconosciamo la classica situazione della biforcazione "a forchetta" di un p.t. di equil. Stabile.

Ne deduciamo la seguente congettura: Pag. 8
in corrispondenza al caso critico t.c. $qE/(kR) = 1$,
il punto di equil. $(\xi, x) = (0, 0)$ deve essere stabile.

(Abbiamo implicitamente utilizzato il fatto che
 $(\pm \eta, \pm \eta) = (0, 0)$ quando $\frac{qE}{kR} = 1$) -

Verifichiamo la suddetta congettura, cioè
quella sottolineata nelle righe precedenti.

Dobbiamo studiare l'andamento dell'energia

potenziale
$$V(\xi, x) = \frac{1}{2} k (\xi - x)^2 + kR^2 \left(\frac{e^{-2x^2/R^2}}{2} - e^{-x^2/R^2} \right)$$

Introduciamo la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-2x^2/R^2}}{2} - e^{-x^2/R^2}$$

Siccome
$$f'(x) = \frac{2x}{R^2} e^{-x^2/R^2} (e^{-x^2/R^2} - 1) > 0 \text{ per } x > 0$$

e $f'(x) < 0$ per $x < 0$, allora $f(x)$ ha un p.to di minimo ^{stretto}
in $x = 0$, per cui $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Si osserva immediatamente che
se $(\xi, x) \neq (0, 0)$, allora

Pag. 9

$$U(\xi, x) = \frac{1}{2} k (\xi - x)^2 + \cancel{k R^2} f(x) > k R^2 f(0) = -\frac{1}{2} k R^2$$

Allora $(\xi, x) = (0, 0)$ è p.to di minimo assoluto
dell'energia potenziale e, quindi, per il teorema
di Lagrange-Dirichlet è di equilibrio STABILE.

(3) Si ponga $\Omega = 0$ e $k = 0$.

Sia Ω la velocità angolare uniforme del sistema
che se è non inertiato. Atorno a 4

(3A) Scrivere la Hamiltoniana del nuovo
sistema.

(3B) Sotto quale condizione l'origine è un punto
di equilibrio stabile? In tale condizione,
si calcoli il periodo nel limite di piccole oscillazioni variabili.

(3C) Si ponga $m = R = g = E = \Omega = 1$. Si Papisce anche la
forza dissipativa $F = -\lambda \dot{V}$ con $\lambda = 1/6$ e velocità di P.
At $t=0$ sia $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0 = 10$. Si dimostri che
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.

(3A) Adesso l'energia cinetica si riduce a $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, mentre la

nuova energia potenziale è

$$U = -qER e^{-x^2/R^2} - \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2$$

eu. pot.
centrifuga!

⇒ la nuova lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + qER e^{-x^2/R^2} - \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2$$

Il sistema è evidentemente a un grado di libertà, calcoliamo quindi il solo momento cinetico $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$

la hamiltoniana è quindi

$$H = p_x \cdot \dot{x} - L(x, \dot{x}) \Big|_{\dot{x} = \frac{p_x}{m}} = \frac{p_x^2}{2m} - qER e^{-x^2/R^2} - \frac{m \Omega^2 x^2}{2}$$

(3B) Il nuovo potenziale U è evidentemente pari, quindi ha sicuramente un punto di equilibrio nell'origine. Studiamo il comportamento di U nei pressi dell'origine

$$U'(x) = \frac{2q\mathcal{E}}{R} x e^{-x^2/R^2} - m\Omega^2 x$$

Pag. 11

$$= x \cdot \left(\frac{2q\mathcal{E}}{R} e^{-x^2/R^2} - m\Omega^2 \right)$$

$\Rightarrow U'(0) = 0$, come già anticipato alla fine della pagina precedente.

$$U''(x) = \frac{2q\mathcal{E}}{R} e^{-x^2/R^2} - \frac{4q\mathcal{E}x^2}{R^3} e^{-x^2/R^2} - m\Omega^2$$

$$\Rightarrow U''(0) = \frac{2q\mathcal{E}}{R} - m\Omega^2 > 0 \text{ quando } \frac{q\mathcal{E}}{m\Omega^2 R} > \frac{1}{2}.$$

Invece se $\frac{q\mathcal{E}}{m\Omega^2 R} < \frac{1}{2}$, allora $U''(0) < 0$, quindi l'origine è un p.to di equilibrio instabile.

Nel caso in cui $\frac{q\mathcal{E}}{m\Omega^2 R} = \frac{1}{2}$, allora

$$U(x) = -q\mathcal{E}R \left(e^{-x^2/R^2} + x^2/R^2 \right) = q\mathcal{E}R \left(-1 + \cancel{x^2/R^2} - \frac{1}{2} \cancel{x^4/R^4} + \frac{1}{2} \cancel{x^4/R^4} + o(x^6) \right)$$

quindi U ha un punto di massimo (quartico) nell'origine e, allora, l'origine è instabile.

Riassumendo, l'origine è un p.to di equil. stabile se $\frac{q\mathcal{E}}{m\Omega^2 R} > \frac{1}{2}$.

Per il teorema delle piccole oscillazioni, Pag. 12
abbiamo che

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \lim_{E \rightarrow U(0)^+} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(0)}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{2q\mathcal{E}}{R} - m\Omega^2}} \\ &= \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{1}{\frac{2q\mathcal{E}}{m\Omega^2 R} - 1}}\end{aligned}$$

(3C) le equazioni del moto diventano ora

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} - \lambda \dot{x},$$

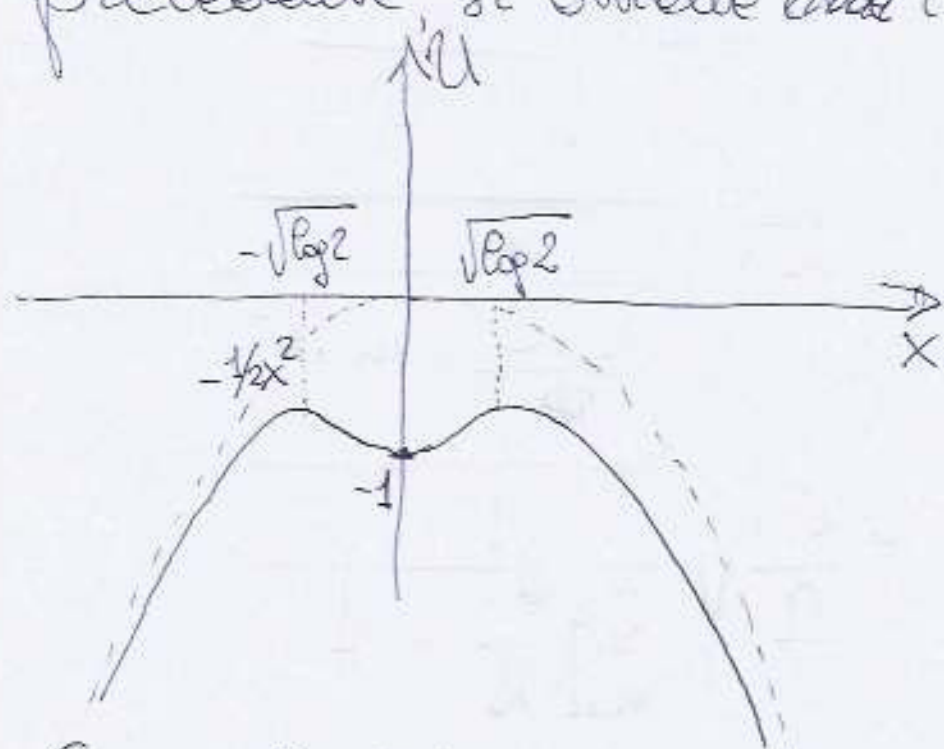
dove $U(x) = -e^{-x^2} - \frac{1}{2}x^2$ (per come sono stati fissati i valori dei parametri) -

È conveniente studiare l'andamento del potenziale. Si ha che $U(-x) = U(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = -\infty$

$$U'(x) = x(2e^{-x^2} - 1), \quad U'(x) = 0 \text{ per } x = 0 \\ \text{oppure per } e^{-x^2} = 1/2 \rightarrow x = \pm \sqrt{\log 2}$$

Mettenendo insieme le informazioni descritte alla fine della pagina precedente, si ottiene che il seguente grafico,

Pag. 13

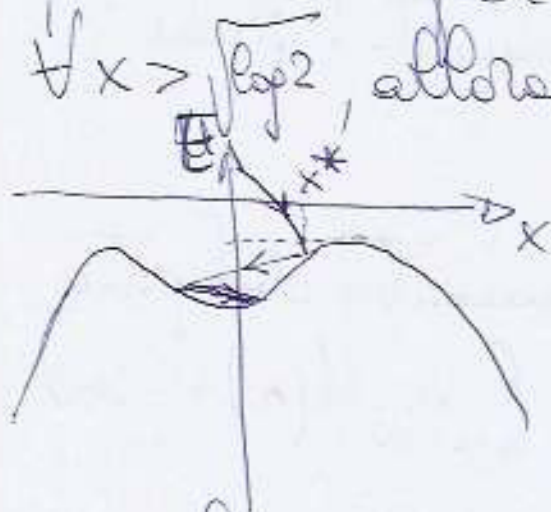


dove abbiamo utilizzato il fatto che $U(0) = -1$.

Come al solito, per verificare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$$

procediamo per assurdo. Siccome $U'(x) < 0$ $\forall x > \sqrt{\log 2}$, allora, affinché sia negata la tesi il moto deve essere del tipo descritto nel grafico qui a fianco (che riguarda l'aumento dell'energia).



Sia l'energia definita nel modo

usuale, cioè $E(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + U(x) = \frac{1}{2} v^2 - e^{-x} - \frac{x^2}{2}$,

allora dall'ipotesi di assurdo discende che

$$(1) \exists t^* > t.c. \quad x(t^*) = x^* \in (0, \sqrt{\log 2}] \quad t.c.$$

$E(x(t^*), \dot{x}(t^*)) = U(\sqrt{\log 2})$, con abuso di notazione comprendiamo anche il caso limite con $t^* = +\infty$.

$$\begin{aligned} (2) \quad \Delta E &= E(x(0), \dot{x}(0)) - E(x(t^*), \dot{x}(t^*)) \\ &= \frac{1}{2} v_0^2 + U(0) - U(\sqrt{\log 2}) = \\ &= 50 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2 = 50 - \frac{1}{2} (1 + \log 2) \end{aligned}$$

Adesso, mostriamo che è impossibile che l'energia dissipata sia così grande.

Infatti, $\Delta E = \lambda \int_0^{t^*} dt (\dot{x}(t))^2 = \lambda \int_0^{x^*} dx \dot{x} = \lambda \int_0^{x^*} dx \sqrt{2(E(x, \dot{x}) - U(x))}$

$$< \lambda \int_0^{x^*} dx \sqrt{2(E(x, \dot{x}) - U(0))}$$

$$< \lambda \int_0^{x^*} dx \sqrt{2(E(0, v_0) - U(0))}$$

$$< \lambda \cdot x^* \sqrt{2\left(\frac{1}{2} v_0^2 + U(0) - U(0)\right)} < \lambda \sqrt{\log 2} v_0,$$

usiamo il fatto che l'energia è crescente per la dissipazione

usiamo il fatto che $U(x)$ è crescente in $[0, \sqrt{\log 2}]$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo
sfruttato l'assunzione (1) dell'ipotesi
di assurdo, cioè $x^* \leq \sqrt{\log 2}$.

P
A
G.
15

Abbiamo quindi stimato che

$$\Delta E < \lambda \sqrt{\log 2} v_0 < \lambda v_0 = \frac{1}{4} \cdot 10 = \frac{5}{2},$$

ma questo è in palese contraddizione con
 (2) , ~~perché~~ che afferma che

$$\Delta E = 50 - \frac{1}{2}(1 + \log 2) > 49.$$

Ne segue che abbiamo falsificato l'ipotesi di
assurdo e, quindi, è vero che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty.$$