

**Prova scritta di Fisica Matematica 1**  
**per il corso di laurea in Matematica**  
**2 Luglio 2018**

Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale  $P$  e da un anello, i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale  $Oxy$ , con asse delle  $y$  verticale ascendente. Il punto materiale  $P$  è di massa  $m$ . Esso è vincolato a muoversi sull'asse delle ascisse  $x$ . L'anello è perfettamente rigido e di densità di massa omogenea al suo interno, è di massa  $M$ , di centro  $C$  e raggio  $R$ . Esso è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale, che è posta in corrispondenza all'ordinata  $y = -R$  ed è da considerare di lunghezza infinita. Una molla ideale, di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla, collega il centro dell'anello  $C$  a  $P_*$ , il quale si muove sulla curva di equazione  $y = -R e^{-x^2/R^2}$  in modo tale da mantenere lo stesso valore della coordinata  $x$  del punto  $P$  (in altri termini,  $P$  è la proiezione di  $P_*$  sull'asse delle ascisse). La massa di  $P_*$  è da considerarsi trascurabile; invece,  $P_*$  è dotato di carica elettrica  $q$ , che è soggetta agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a  $\mathcal{E}$ , parallelo all'asse delle ordinate  $y$ , ma diretto con verso discendente.

È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero  $m$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $k$ ,  $q$  e  $\mathcal{E}$ , abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e tali che i punti  $P$  e  $P_*$  possano attraversare l'anello senza scontrarsi con esso. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si consideri ora un sistema meccanico simile a quello descritto inizialmente nel testo, a cui vengono apportate le seguenti variazioni. In primo luogo, si rimuovano l'anello e la molla (in altri termini, si ponga  $M = k = 0$ ). Inoltre, tutto il sistema meccanico è ora da considerarsi non inerziale, perché è posto in rotazione, con velocità angolare uniforme  $\Omega$  attorno all'asse  $y$ .
  - (3A) Si scriva la Hamiltoniana che descrive il moto del punto  $P$  nel nuovo sistema meccanico.
  - (3B) Si discuta la condizione per cui l'origine è un punto di equilibrio stabile. Quando tale condizione è verificata si calcoli il periodo nel

limite di piccole oscillazioni del punto  $P$  intorno all'origine.

- (3C) Si consideri ora il caso in cui i valori dei parametri sono fissati in modo tale che  $m = R = q = \mathcal{E} = \Omega = 1$ . Inoltre, si assuma che il punto  $P$  è soggetto a una forza dissipativa di tipo  $F = -\lambda v$ , dove  $\lambda = 1/4$  e  $v$  è proprio la velocità del punto  $P$ . Si studi il moto che fa seguito a condizioni iniziali tali che, al tempo  $t = 0$ , il punto  $P$  si trova nell'origine con velocità  $v_0 = 10$ . Si dimostri che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty ,$$

dove  $x(t)$  è la legge del moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali.