

Esame Gennaio 2019

Pag. 1

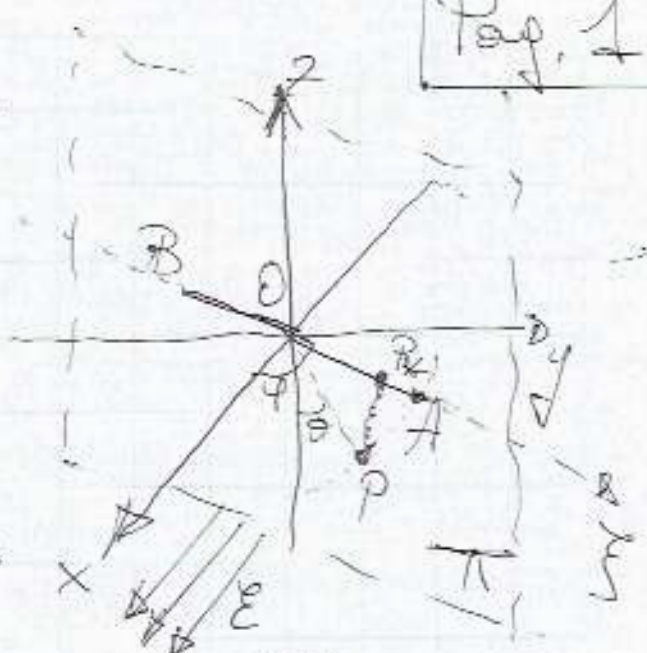
Massa asta = M $\overline{AB} = 2R$

" $P = m$ $\overline{OP} = R$

$A, B \in \Pi$, asse $z \in \Pi$
 $\vec{P} \perp \vec{AB}$, Costante molla k
 P e $P_0 = k$

Carica in $A = q$.

Campo elettrico $\vec{E} \parallel x$ con E costante.



(1) Lagrangiana e equazioni di Lagrange.

Coordinate $A: (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$
 " $P: (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, 0)$
 " $P: (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$

$$\underline{V}_P = R \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{1}{12} M (2R)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \underline{V}_P \cdot \underline{V}_P =$$

$$= \frac{M}{6} R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \theta \right) R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = mgz_p + \frac{1}{2} k \overline{PP_*}^2 - qEx_A$$

Pag. 2

$$= -mgR \cos \theta + \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \theta - qER \cos \varphi$$

⇒ la lagrangiana assume la forma seguente:

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \theta \right) R^2 \dot{\varphi}^2 + mgR \cos \theta - \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \theta + qER \cos \varphi$$

e quindi le equazioni di Lagrange sono

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m R^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \theta \right) R^2 \ddot{\varphi} \\ &\quad + 2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} - mgR \sin \theta \\ &\quad - k R^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \theta \right) R^2 \ddot{\varphi} + 2mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ &\quad + qER \sin \varphi = 0 \end{aligned} \right.$$

(2) Determinare i punti di equilibrio e studiare la stabilità.

Cerchiamo di risolvere il sistema

Pag. 3

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR \sin \theta - kR^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} = qER \sin \varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \varphi = 0, \pi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = kR^2 \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{mg}{kR} \right) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$\theta = 0, \pi$$

$$\Downarrow$$
$$\cos \theta = \frac{mg}{kR}$$

$$\Downarrow$$
$$\theta = \pm \beta, \text{ dove } \beta = \arccos\left(\frac{mg}{kR}\right)$$

~~Concludendo~~

che $\exists$ sse $\frac{mg}{kR} \leq 1$

Riassumendo, i punti di equilibrio sono

$$(\theta, \varphi) \in \{(0, 0), (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi), (\pm \beta, 0), (\pm \beta, \pi)\},$$

dove gli ultimi 4 p.ti di Pag. 11
equilibrio $\exists$ sse $\frac{mg}{kR} \leq 1$.

Calcoliamo l' Hessiano in generale:

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} mgR \cos \theta - kR^2(2\cos^2 \theta - 1) & 0 \\ 0 & qER \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Studiamo ora i vari casi particolari.

Ogni volta che $\varphi = \pi$, abbiamo che ~~non~~
il secondo autovalore

$$qER \cos \varphi = -qER$$

è negativo, quindi

$(0, \pi), (\pi, \pi), (\pm \pi, \pi)$ sono tutti
INSTABILI.

Caso $(0, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} mgR - kR^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se $\frac{mg}{kR} > 1 \Rightarrow 2$ autovel. pos. $\Rightarrow$ **STABILE**.

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} < 1$

Pag. 5

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} = 1$

1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ occorre un
supplemento di indagine.

Caso $(\pi, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} -mgR - kR^2 & 0 \\ 0 & q \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

Caso $(\pm\beta, 0)$

$$\begin{aligned} \text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pm\beta \\ \varphi=0}} &= \begin{pmatrix} mgR \cdot \frac{mg}{kR} - kR^2 \left(2 \frac{u_0^2}{kR^2} - 1 \right) & 0 \\ 0 & q \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{k} (kR^2 - u_0^2 g^2) & 0 \\ 0 & q \in \mathbb{R} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} < 1$

$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ STABILI

- Sottocaso $\frac{mg}{kR} = 1$

Pag. 6

→ 1 autoval. pos. e 1 nullo

⇒ Occorre un supplemento d'indagine

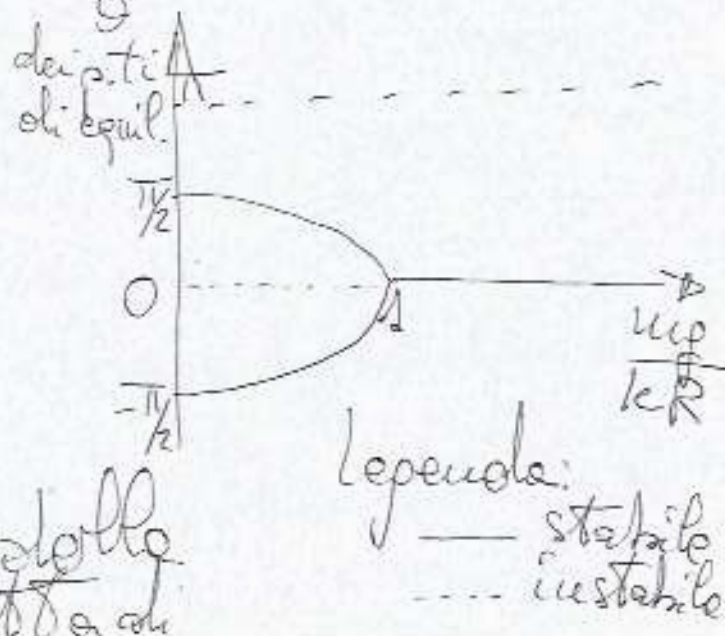
- Sottocaso $\frac{mg}{kR} > 1$

Non è da studiare, perché in tali condizioni
i p.ti di equilibrio $(\pm \beta, 0) \nexists$ -

Passiamo ora al supplemento d'indagine
nel caso critico $\frac{mg}{kR} = 1$ -

Quando $\frac{mg}{kR} = 1 \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{mg}{kR}\right) = 0$,
quindi i 3 punti di equilibrio da studiare
 $(0,0), (\pm \beta, 0)$ in realtà sono coincidenti.

Dal grafico riassuntivo
dello studio fatto sin
qui, è evidente che in
 $(0,0)$ si può riconoscere
la classica situazione della
biforcazione a forchetta di



un p.to di equilibrio stabile
quando in corrispondenza al
valore 1 del parametro $\frac{mg}{kR}$.

pag. 7

Questo porta a congetturare che $(0,0)$ sia stabile
quando $mg/(kR) = 1$.

Infatti, siccome (quando $mg = kR$)
 $U(\theta, \varphi) = f(\theta) + g(\varphi)$,

$$\text{dove } f(\theta) = \frac{1}{2} kR^2 (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta) = \frac{1}{2} kR^2 \left(\frac{1}{2} \cos \theta - 2 \right) \cos \theta$$

$$\text{e } g(\varphi) = -gER \cos \varphi, \text{ allora}$$

$U(\theta, \varphi)$ ha un punto di minimo in $(0,0)$
perché $f(\theta)$ ha p.to di min. in $\theta=0$ e $g(\varphi)$
ha p.to di min. in $\varphi=0$. Il che è evidente
per il fatto che $f'(\theta) = kR^2 (-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta) =$
 $= kR^2 \sin \theta (1 - \cos \theta) \Rightarrow f'(\theta) > 0$ per $\theta \in (0, \pi)$
e $f'(\theta) < 0$ per $\theta \in (-\pi, 0)$. Inoltre la situazione
per $g(\varphi)$ è simile, perché $g'(\varphi) = gER \sin \varphi$.

Siccome $U(\theta, \varphi)$ ha un p.to di minimo
in $(0,0)$ quando $\frac{mg}{kR} = 1$, allora

$(\theta, \varphi) = (0,0)$ è p.to di equilibrio stabile per il
teorema di Lagrange-Dirichlet.

(3) Trascuriamo carica e campo elettrico (cioè poniamo $q=0$, $E=0$).
Introduciamo un ulteriore vincolo, in modo che la vel. angolare del piano Π è $\dot{\varphi} = \Omega$ costante.

(3A) Si scriva la Ham. e le eq. di Ham. per il problema a 1 grado di libertà del moto di P in Π .

(3B) Si ~~calcoli~~ determini Ω in modo t.c. P possa effettuare piccole oscillazioni attorno a un valore medio $\vartheta_H = \pm \pi/3$.

————— o —————
Possiamo ridcrivere la lagrangiana del moto ~~nel~~ sistema non-inerziale, come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vartheta, \dot{\vartheta}) &= L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi} = \Omega) = \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 \sin^2 \vartheta \\ &\quad + m g R \cos \vartheta - \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \vartheta \end{aligned}$$

Ne segue che possiamo distinguere Pag. 9
una parte cinetica

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

e una parte potenziale

$$U = -m g R \cos \theta + \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$

Il momento coniugato a θ , per definizione,
è

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow H(p_\theta, \theta) = p_\theta \cdot \dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}) \Big|_{\dot{\theta} = \dot{\theta}(p_\theta, \theta)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{m R^2} + U(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{m R^2} - m g R \cos \theta + \frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$

Ne segue che le eq. di Ham. sono

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m R^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -m g R \sin \theta + (k + m \Omega^2) R^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

Affinché possano esserci piccole oscillazioni attorno a $\vartheta_H = \pm \frac{\pi}{3}$, deve avvenire che $(\vartheta, \dot{\vartheta}) = (\pm \frac{\pi}{3}, 0)$ sia una ^{soluz.} ~~una p.to~~ di equilibrio per le eq. del moto e che inoltre sia (un p.to di equil.) stabile.

Deve quindi accadere che

$$-mgR \sin \frac{\pi}{3} + (k + m\Omega^2)R^2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$\Rightarrow (k + m\Omega^2)R^2 = 2mgR \quad [*]$$

$$\Rightarrow m\Omega^2 = 2 \frac{mg}{R} - k$$

$$\Rightarrow \Omega = \pm \sqrt{2 \frac{g}{R} - \frac{k}{m}}$$

Ovviamente, tali soluzioni $\exists$ sse $\frac{k}{m} \leq \frac{2g}{R}$.

Bisogna infine controllare che $U''(\pi/3) > 0$:

$$U''(\pm \pi/3) = -mgR \cos \frac{\pi}{3} + (k + m\Omega^2)R^2 \cos \frac{2\pi}{3} =$$

$$= -\frac{mgR}{2} + \frac{(k + m\Omega^2)R^2}{2} = \frac{1}{2} [(k + m\Omega^2)R^2 - mgR]$$

Sfruttando [*] $\Rightarrow \frac{1}{2} (2mgR - mgR) = \frac{1}{2} mgR > 0 \Rightarrow$ STABILI