Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
25 Gennaio 2019

Un sistema meccanico è costituito da un'asta e da un punto materiale P, i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale ascendente. L'asta è perfettamente rigida, di spessore infinitesimo, di massa M, di raggio $2R$ e di densità di massa omogenea al suo interno; essa è vincolata a ruotare nel piano *orizzontale* Oxy, attorno all'origine O che è coincidente con il punto medio degli estremi A e B dell'asta stessa. Si denoti con la lettera Π il piano *verticale e mobile nel tempo* cui appartiene l'asta e, ovviamente, l'asse delle z. Il punto P è di massa m ed è vincolato a muoversi su di una guida circolare di raggio R, che giace nel piano Π ed è centrata nell'origine. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P alla sua proiezione $P_\star$ sull'asse (mobile) delle ξ. Si assuma che le masse della guida circolare e del punto $P_\star$ siano trascurabili. Nel vertice A dell'asta è posta una carica q, che è soggetta agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse delle x.

È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero m , M , R , k , q e $\mathcal{E}$, abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo che il punto P possa attraversare i vertici dell'asta senza scontrarsi con essi. Si risponda alle domande seguenti.

(1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema meccanico sopra descritto.

(2) Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema e si studi la loro stabilità, al variare di tutti i parametri.

(3) Si consideri il sistema meccanico quando è soggetto anche all'ulteriore vincolo descritto dall'equazione $\dot{\varphi} = \Omega$, laddove Ω è *costante* e φ è l'angolo che ha vertice nell'origine O ed è formato dalle semirette con valori positivi delle ascisse x e ξ (cioè φ è un angolo che individua la giacitura di Π rispetto al piano verticale Oxz). Si ponga $q = \mathcal{E} = 0$.

(3A) Si scrivano la Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton [⋆] che descrivono la dinamica relativa al riferimento *non inerziale* e cartesiano

[⋆] Qualora proprio non riesca la discussione degli esercizi *in ambito Hamil-*

$O\xi z$, solidale al piano Π.

(3B) Si determinino i valori della velocità angolare Ω, per cui possono esistere delle soluzioni delle equazioni di Hamilton che descrivono delle piccole oscillazioni del punto P nel piano Π attorno a un punto medio M, tale che sia uguale a $\pi/3$ l'angolo tra OM e il semiasse delle z che si trova al di sotto del piano Oxy.

toniano, così come essi sono descritti ai punti (3A) e (3B), sarà considerata meritoria anche un'eventuale soluzione che utilizza esclusivamente il formalismo Lagrangiano.