Si studi il moto di un punto materiale P di massa $m=1$, quando è governato dall'equazione

$$\ddot{x} = -\frac{dU_a}{dx} - \lambda \dot{x}$$

dove $\lambda \geq 0$ e

$$U_a = U_a(x) = (2x^6 - 13x^4 + a x^2)$$

con $a \in \mathbb{R}_+$.

1) Nel caso conservativo, ovvero quando $\lambda = 0$, si determini il valore $\bar{a}$ per cui la distanza tra i punti di equilibrio stabile è 2. Per quel valore di $a = \bar{a}$, si caratterizzino tutte e sole le condizioni iniziali tali che il corrispondente moto $x(t)$ rimane alla destra dell'asse delle ordinate $\forall t \in \mathbb{R}$, percorrendo un'orbita limitata.

Per prima cosa, determiniamo il valore di $\bar{a}$.
A questo scopo, cominciamo a determinare la posizione dei p.ti di quiete, risolvendo l'equazione

$$U_a'(x) = 0$$

$\Rightarrow -12x^5 + 52x^3 - 2ax =$

$$\boxed{-2x\left(6x^4 - 26x^2 + a\right) = 0}$$

$\swarrow$ $\searrow$

$x = 0$ $\qquad\qquad x^2 = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-6a}}{6}$

Osserviamo che $\lim_{x \to \pm\infty} V_a(x) = -\infty \quad \forall a$

e $V_a'(0) = 0$, $V_a''(0) = 2a > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$.

Di conseguenza, abbiamo che

quando $a > \dfrac{169}{6}$, $\nexists$ p.ti di minimo per V_a;

mentre, se $0 < a < \dfrac{169}{6}$, allora

$$-\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-6a}}{6}}, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{13+\sqrt{169-6a}}{6}}$$

sono le ascisse dei p.ti di massimo, mentre

$$-\sqrt{\frac{13-\sqrt{169-6a}}{6}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{13-\sqrt{169-6a}}{6}}$$

sono le posizioni, sull'asse x, dei p.ti di minimo locale, che sono p.ti di equilibrio stabili.

Affinché la distanza tra questi due punti sia uguale a 2, deve essere $\frac{13-\sqrt{169-6\bar{a}}}{6}=1$

$$\Rightarrow \sqrt{169-6\bar{a}}=7$$

$$\Rightarrow 6\bar{a}=169-49=120$$

$$\Rightarrow \bar{a}=20$$

Passiamo ora a studiare il grafico di

$$U_{\bar{a}}(x)=-2x^6+13x^4-ax^2$$

Per quanto visto in precedenza, abbiamo che in 0 e $\pm\sqrt{10/3}$ abbiamo i p.ti di massimo, mentre in ± 1 ci sono i p.ti di minimo.

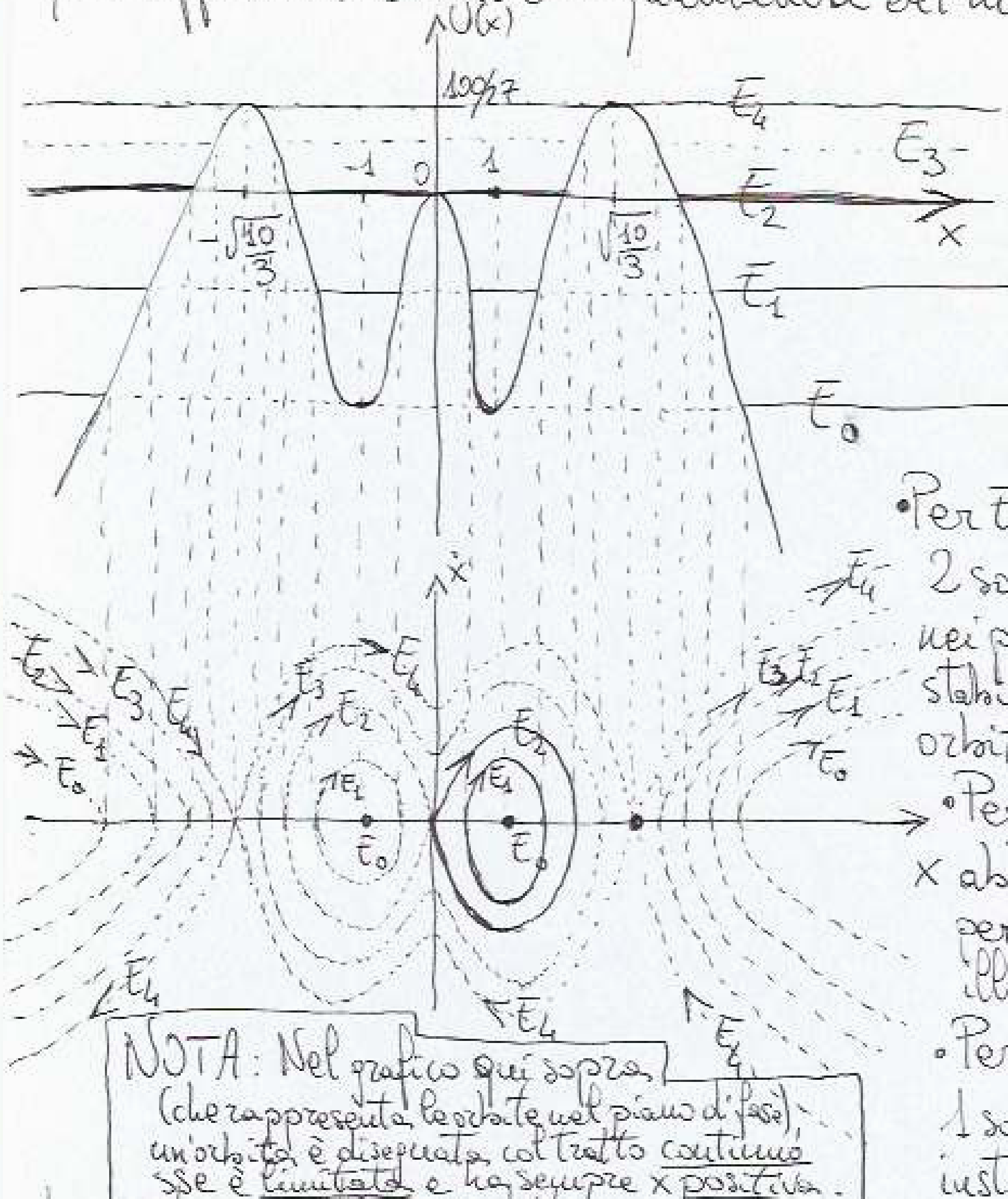
Notiamo inoltre che

$$U_{\bar{a}}(0)=0 \qquad U_{\bar{a}}(\pm 1)=-9$$

$$U_{\bar{a}}\left(\pm\sqrt{10/3}\right)=-2\left(\frac{10}{3}\right)^3+13\left(\frac{10}{3}\right)^2-20\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{10}{3}\right)\cdot\frac{-200+390-180}{9}=\frac{100}{27}$$

Queste informazioni sono sufficienti per effettuare l'analisi qualitativa del moto.



Ci limitiamo a discutere i livelli di energia per cui ci sono delle orbite con le caratteristiche richieste dalla domanda.

- Per $E = E_0 = -9$, abbiamo 2 soluzioni di quiete nei p.ti di equilibrio stabile $x(t) = \pm 1$ e 2 orbite illimitate.
- Per $E = E_1 \in (-9, 0)$ abbiamo 2 orbite periodiche e 2 orbite illimitate.
- Per $E = E_2 = 0$, abbiamo 1 soluz. di equilibrio instabile in $x(t) = 0$, due moti a meta asintotica ~~verso~~ (le cui corrispondenti orbite sono limitate) verso il punto di equil. instabile e due orbite illimitate.
- Il livello di energia E_3 è tratteggiato perché le corrispondenti orbite sono illimitate oppure NON sono positive $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Per $E = E_4 = \mathcal{U}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \frac{100}{27}$ abbiamo 2 p.ti di equil. INST. in $x(t) = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$, 2 moti a meta asintotica con orbite limitate e 4 orbite illimitate.

Le condizioni iniziali richieste formano il seguente insieme:

$$\left\{(x_0, v_0) : \mathcal{E}(x_0, v_0) \in [-9, 0] \wedge x_0 \in \left(0, \sqrt{\frac{10}{3}}\right)\right\} \cup \left\{\left(\sqrt{\frac{10}{3}}, 0\right)\right\}$$

dove $\mathcal{E}(x,v) := \frac{1}{2}v^2 + U(x)$

$= \frac{1}{2}v^2 - 2x^6 + 13x^4 - 20x^2$.

In realtà, si potrebbe facilmente verificare che $x_0 \in (0,2]$, perché basterebbe risolvere l'equazione $U_{\bar{a}}(x) = 0$, per rendersi conto che le orbite a moto asintotico hanno come barriera di potenziale ± 2.

2) Si studi ora il problema quando $a = 8$ e $\lambda = 0$ (cioè, ancora nell'ambito conservativo).
Si consideri il moto che fa seguito alle condizioni iniziali

$$x(0) = 1 \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 .$$

Si verifichi che è periodico e detto T il periodo si determinino 2 valori $T_\pm$ tali che sussista la catena di disuguaglianze

$$T_- \leq T \leq T_+ .$$

Riaggiorniamo il calcolo della derivata prima e dei p.ti stazionari:

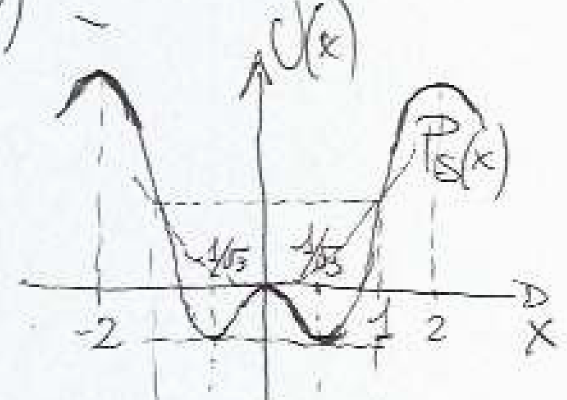
$$U_8'(x) = -12x^5 + 52x^3 - 16x$$
$$= -4x \cdot \left(3x^4 - 13x^2 + 4\right);$$

ne segue che $U_8'(x) = 0$, quando

$$x = 0, \quad \text{oppure} \quad x = \pm\sqrt{\frac{13 + \sqrt{169-48}}{6}} = \pm 2$$

$$\text{oppure} \quad x = \pm\sqrt{\frac{13-11}{6}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

dove nella prima riga ci sono i p.ti di max. e nella seconda riga ci sono i p.ti di min. (si ricordi che $\lim_{x\to\pm\infty} U_8(x) = -\infty$).

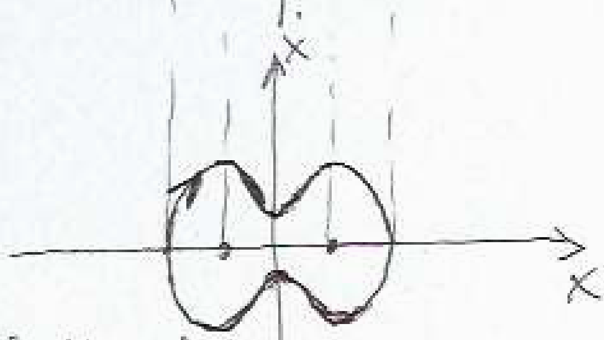


Tenendo conto delle seguenti valutazioni del potenziale:

$U_8(0) = 0$, $U_8(\pm 2) = 48$

$$U_8\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{9} - \frac{13}{3} + 8\right) = -\frac{35}{27}$$

$$U_8(1) = 3$$



Dal grafico (essendo $U_8'(1) > 0$ e $U_8(1) > U_8(0)$), segue imme diatamente che il moto è periodico.

Per determinare T_-, utilizziamo la stima

$$T_- = \frac{2(x_+ - x_-)}{v_{max}} = \frac{2[1-(-1)]}{\sqrt{2\left(U_\delta(1) - U_\delta\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\left(3+\frac{35}{27}\right)}} \gtrsim 1,36$$

Per determinare T_+, per prima cosa dobbiamo verificare che

$$U(x) \leq P_S(x) \quad \forall\, x \in [-1, 1],$$

dove $P_S(x)$ è la parabola t.c. $P_S(0) = 0$ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ e $P_S(\pm 1) = 3$, cioè $P_S(x) = 3x^2$.

Cerchiamo di risolvere la disequazione

$$-(2x^6 - 13x^4 + 8x^2) \leq 3x^2 \Rightarrow 2x^6 - 13x^4 + 11x^2 \geq 0$$

Cerchiamo gli zeri, ponendo $u = x^2$, cioè poniamo

$$2u^3 - 13u^2 + 11u = u(2u^2 - 13u + 11) = 0$$

$$u = 0 \qquad u = \frac{13 \pm \sqrt{169-88}}{4} = \frac{13 \pm 9}{4} \begin{cases} 1 \\ \frac{11}{2} \end{cases}$$

Siccome le soluzioni dell'equazione $2x^6 - 13x^4 + 11x^2 = 0$

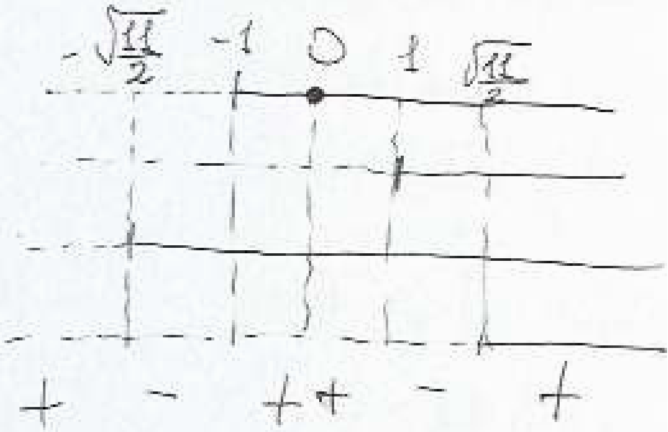
sono tutte "doppie" allora possiamo scomporre il polinomio come segue: $2x^6-13x^4+11x^2 = 2x^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x+\sqrt{\frac{11}{2}}\right)\cdot\left(x-\sqrt{\frac{11}{2}}\right)$,

quindi si ha che

$$2x^6-13x^4+11x^2 \geq 0$$

per $x \leq -\sqrt{11/2}$, $x \geq \sqrt{\frac{11}{2}}$

e per $-1 \leq x \leq 1$.



Possiamo allora concludere che

$$U(x) \leq P_5(x) \quad \forall\, x \in [-1, 1].$$

Questo ci consente di utilizzare la stima

$$T_+ = 2\pi \sqrt{\frac{m}{P_5''}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$$

Abbiamo quindi che

$$1{,}36 \lesssim \frac{4}{\sqrt{2\left(3+\frac{35}{27}\right)}} = T_- \leq T \leq T_+ = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \lesssim 2{,}57$$

La stima ha un margine di incertezza del

$$\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \simeq 31\%$$

3) Si consideri ora il caso dissipativo con $\lambda = 1/\cancel{4}$ e $a = 8$ (come al punto 2). Si studi il moto che fa seguito alle condizioni iniziali

$$x(0) = -(\sqrt{2}-1) \qquad \dot{x}(0) = 2\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Si verifichi che

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 1/\sqrt{3}$$

Nota: può essere assai utile osservare che

$$U_8\left(\pm(\sqrt{2}-1)\right) = U_8\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

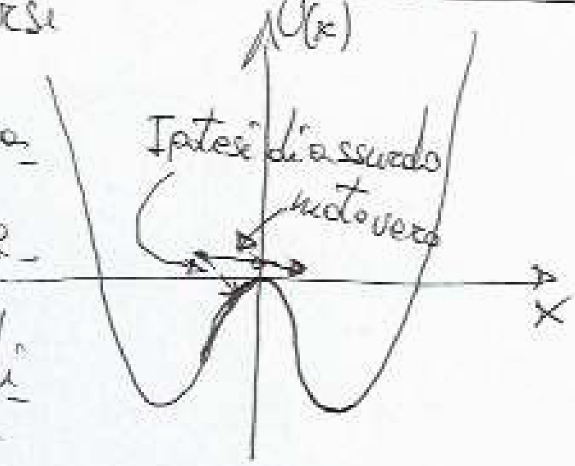
Innanzitutto ridefiniamo ~~la~~ funzione energia come segue:

$$\mathcal{E}(x,v) := \frac{1}{2}v^2 - 2x^6 + 13x^4 - 8x^2$$

Tenendo conto della nota (che ci assicura che $U_8(x(0)) = -1$), si ottiene immediatamente che

$$\mathcal{E}(x(0),\dot{x}(0)) = \frac{1}{2}\frac{12}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

Dopo aver ricordato il grafico del potenziale, è facile rendersi conto che occorre prima verificare che il moto oltrepassa l'origine.



A questo scopo, com'è consuetudine per questo tipo di esercizi, procediamo per assurdo. Ipotizziamo, cioè, che $\exists\, \tau \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ t.c. $x(\tau) \in \left(-(\sqrt{2}-1), 0\right]$ t.c.

$$\mathcal{E}\left(x(\tau), \dot{x}(\tau)\right) = U\left(x(\tau)\right) \leq 0$$

(includendo anche il caso limite $\tau = +\infty$ e $x(+\infty) = 0$, abbiamo tenuto conto anche di un eventuale moto a meta asintotica).

Effettuiamo ora la stima dell'energia dissipata:

$$|\Delta E| = \lambda \int_0^\tau dt\, \dot{x}^2(t) = \lambda \int_{x(0)}^{x(\tau)} d\xi \sqrt{2\left[\mathcal{E}(\xi, v(\xi)) - U_0(\xi)\right]}$$

qui sfruttiamo il fatto che U_0 è crescente in $[-(\sqrt{2}-1), 0]$.

$$\leq \lambda \int_{-(\sqrt{2}-1)}^{0} d\xi \sqrt{2\left[\frac{1}{5} - (-1)\right]} = \lambda\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{12}{5}}$$

$$\simeq 0.64 \cdot \lambda = 0.16 < 1/5 .$$

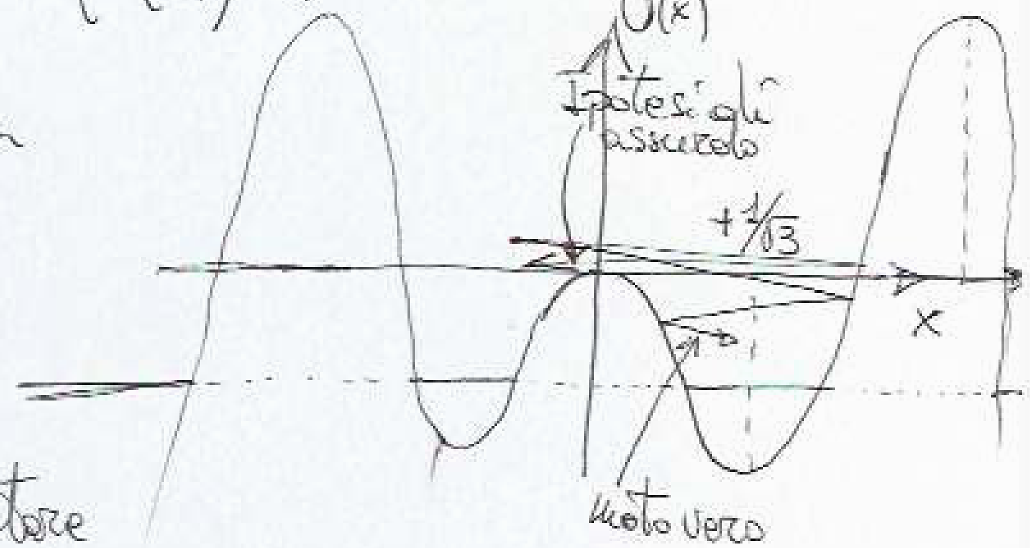
Siamo quindi giunti a un assurdo, perché abbiamo che

$$\mathcal{E}(x(\tau),\dot{x}(\tau)) = \mathcal{E}(x(0),\dot{x}(0)) - |\Delta E| > \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = 0,$$

contro l'ipotesi di assurdo che richiedeva che

$$\mathcal{E}(x(\tau),\dot{x}(\tau)) = U(x(\tau)) \leq 0 .$$

Per terminare la verifica che $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1/\sqrt{3}$,



dobbiamo accertare che ~~la legge del moto~~ l'orbita "cade" all'interno della buca di potenziale che ha p.to di minimo in $1/\sqrt{3}$ ed è delimitata superiormente dal livello di energia $E=0$ (corrispondente al p.to di max. locale nell'origine).

A questo scopo, procediamo nuovamente per assurdo. Ipotizziamo che esistano 2 tempi $\bar{t}$ e t^* entrambi positivi t.c. $\bar{t} < t^*$, $x(\bar{t}) = 0$ (con $\dot{x}(\bar{t}) > 0$) e $x(t^*) = 0$. Dalla prima verifica per assurdo, sappiamo che $\bar{t}\ \exists$, l'assurdo sta nell'esistenza di $t^* > \bar{t}$. Assumiamo che t^* possa essere uguale a $+\infty$, in modo da includere il moto a meta asintotico.

Come immediata conseguenza dell'ipotesi di assurdo, abbiamo che

$$\exists\, t_+ \in (\bar{t}, t^*) \text{ t.c. } \dot{x}(t_+) \underset{\neq}{=} 0 \text{ e } \mathcal{E}(x(t_+), \dot{x}(t_+)) = U(x(t_+)) \geq 0,$$

cioè $x_+ = x(t_+)$ è una barriera di potenziale;

inoltre, $\forall\, t \in [0, t^*]$ $\mathcal{E}(x(t), \dot{x}(t)) \geq 0$.

Stimiamo l'energia dissipata

$$|\Delta E| = \lambda \int_0^{t^*} dt\, \dot{x}^2(t) < \lambda \int_{\bar{t}}^{t^*} dt\, \dot{x}^2(t) = \cancel{\lambda \int_0^{x_+} d\xi\, 2\mathcal{E}(x(\xi), \dot{x}(\xi))}$$

$$= \lambda \int_0^{x_+} d\xi \sqrt{2\left[\mathcal{E}(x(\xi), \dot{x}(\xi)) - U(\xi)\right]} \; + \quad \leftarrow \text{andata}$$

$$- \lambda \int_{x_+}^{0} d\xi \sqrt{2\left[\mathcal{E}(x(\xi), \dot{x}(\xi)) - U(\xi)\right]} \quad \leftarrow \text{ritorno}$$

$$> 2\lambda \int_{\sqrt{2}-1}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{2\left[0 - (-1)\right]} = 2\sqrt{2}\,\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1\right)$$

$$= 2(\sqrt{2}-1)\,\lambda \gtrsim 0.82\,\lambda = 0.21$$

qui sfruttiamo il fatto che sappiamo che $U_8(\pm(\sqrt{2}-1)) = U_8(\pm 1) = -1$ e che (essendo U_8 di 6° grado e pari) $\nexists$ altre sol. pos. e minori di 2 dell'eq. $U_8(x) = -1$

Siamo quindi giunti all'assurdo!

Infatti, non può essere che (come abbiamo ipotizzato) $\mathcal{E}(x(t^*),\dot{x}(t^*))\geq 0$, poiché

$$\mathcal{E}(x(t^*),\dot{x}(t^*)) = \mathcal{E}(x(0),\dot{x}(0)) - |\Delta E| < 1/5 - 0.21 = -\frac{1}{100} < 0 .$$