

I prova di esonero di Fisica Matematica 1
Corso di laurea in Matematica
20 Aprile 2017

Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\frac{d U_a}{d x} - \lambda \dot{x} ,$$

dove $\lambda \geq 0$ è il coefficiente di attrito e l'energia potenziale $U_a(x)$ è definita da:

$$U_a(x) = -2x^6 + 13x^4 - ax^2$$

per un fissato valore del parametro $a \in \mathbf{R}^+$.

- (1) Si studi il caso conservativo ($\lambda = 0$), per quel solo valore \bar{a} del suddetto parametro tale che la distanza (sull'asse x) tra i punti di equilibrio stabili è uguale a 2.

Limitatamente all'energia potenziale $U_{\bar{a}}$, si determinino tutte e sole le condizioni iniziali del tipo:

$$(x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0) ,$$

cui fanno seguito delle leggi del moto tali per cui le corrispondenti orbite sono limitate e, contemporaneamente, è soddisfatta la seguente equazione

$$x(t; x_0, v_0) > 0 \quad \forall t \in \mathbf{R} .$$

- (2) Limitatamente al caso con $\lambda = 0$ e $a = 8$, si verifichi (rapidamente) che il moto con condizione iniziale

$$(x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0)$$

è periodico. Inoltre, si dia una stima del periodo T del moto, determinando *esplicitamente*

- (2a) un numero reale positivo T_- tale che $T \geq T_-$;
(2b) un numero reale $T_+ \geq T$ tale che l'errore relativo della stima sia inferiore al 50% .

- (3) Si ponga ora $\lambda = 1/4$ e si mantenga il valore del parametro fissato ad $a = 8$ (come nel precedente punto (2)). Si studi il moto che fa seguito alle condizioni iniziali

$$\left(x(0) = -(\sqrt{2} - 1), \dot{x}(0) = \sqrt{12/5} \right).$$

Si verifichi che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x\left(t; -(\sqrt{2} - 1), \sqrt{12/5}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A tale scopo, può risultare assai utile la seguente

Osservazione: si noti che

$$U_8\left(\pm(\sqrt{2} - 1)\right) = U_8\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1.$$