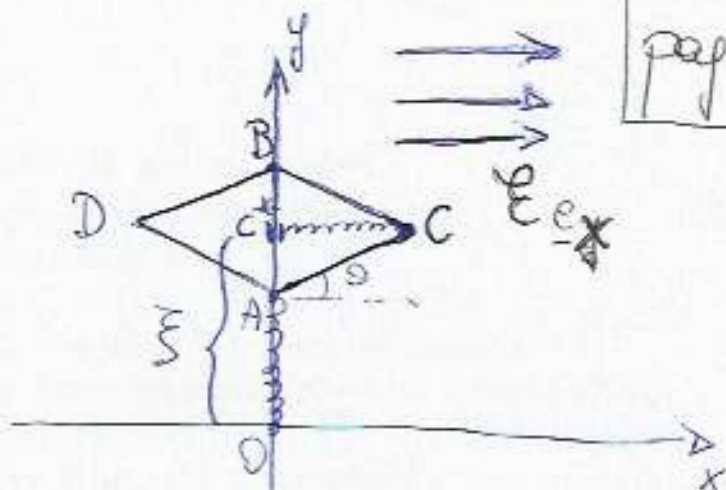


Il esauero di FMI

Giugno 2017



pag. 1

Massa di ciascuna asta = m

Carica elettrica in C = q

Campo elettrico = $E \underline{e}_x$ con E costante
costante nulla tra ~~0~~ e A = l_1

"

"

"

C e C* = l_2

$q = 0$
 $AB = BC = CD = DA = l$

(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange

Scepiamo come coordinate libere o lagrangiane

ξ, ϑ dove ξ è l'ordinata di C* e ϑ è l'angolo
tra AC e la semiretta parallela (e equiversa)
all'asse delle ascisse e ~~da~~ uscente da A.

Scriviamo le coordinate dei punti che sono interessanti per la soluzione dell'esercizio.

Coord. C*: $(0, \xi)$; Coord. A: $(0, \xi - l \sin \vartheta)$

Coord. C: $(l \cos \vartheta, \xi)$; Coord. B: $(0, \xi + l \sin \vartheta)$

Coord. D: $(-l \cos \vartheta, \xi)$

Al fine di calcolare l'energia cinetica, è conveniente
scrivere le coord. di un generico p.to P che si trova sull'asta
di vertici A e C ~~in~~ $(l \cos \vartheta, \xi - (l - p) \sin \vartheta)$,

dove $p \in [0, l]$. Ne segue che

pag. 2

$$\underline{v}_p = (-p\dot{\theta} \sin \theta, \dot{\xi} - (l-p)\dot{\theta} \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_p \cdot \underline{v}_p &= p^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\xi}^2 + (l-p)^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2(l-p)\dot{\xi}\dot{\theta} \cos \theta \\ &= p^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2lp\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2(l-p)\dot{\xi}\dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

L'energia cinetica dovuta all'asta di vertice A e C è quindi

$$T_{AC} = \frac{m}{2l} \int_0^l dp \left[p^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2lp\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2(l-p)\dot{\xi}\dot{\theta} \cos \theta \right]$$

$$= \frac{m}{2l} \left[\frac{l^3}{3} \dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 l + l^3 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - l^3 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\xi} \dot{\theta} \cos \theta \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{m}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{m}{6} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta}{2} \\ &\quad - \frac{m l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta}{2} + \frac{m l}{2} \dot{\xi} \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

Ripetiamo il ragionamento per un generico punto P che si trova sull'asta di vertice ~~A~~ B e C, le cui coordinate saranno $(p \cos \theta, \xi + (l-p) \sin \theta)$ dove $p \in [0, l]$. Ne segue che

$$T_{BC} = \frac{m}{2l} \int_0^l dp \left[p^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\xi}^2 + \cancel{l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta} - 2lp\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \cancel{2(l-p)\dot{\xi}\dot{\theta} \cos \theta} \right]$$

$$= \frac{m}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{m}{6} l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{m l}{2} \dot{\xi} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\Rightarrow T_{AC} + T_{BC} = m \dot{\xi}^2 + \frac{m}{3} l^2 \dot{\theta}^2$$

pag. 3

Ripetendo ancora il ragionamento per le altre 2 aste, abbiamo che

$$T = 2m \dot{\xi}^2 + \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Ovviamente, si arriva allo stesso risultato applicando il teorema di König prima all'asta AC e poi a quella BC. Anzi, per quest'altre aste si fanno un po' di conti in meno.

Passiamo ora al calcolo del potenziale.

Inizialmente, scriviamo

$$U = -q \mathcal{E} x_C + \frac{1}{2} k_2 \overline{CC}^2 - q \mathcal{E} x_C + \frac{1}{2} k_2 x_C^2 + \frac{1}{2} k_1 \overline{OA}^2$$

per poi sostituire quell'espressione in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$U = -q \mathcal{E} l \cos \theta + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} k_1 (\xi - l \sin \theta)^2$$

Possiamo quindi scrivere la lagrangiana del sistema:

$$L = T - U = 2m \dot{\xi}^2 + \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 (\xi - l \sin \theta)^2 + q \mathcal{E} l \cos \theta - \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2 \theta$$

le eq. di Lagrange allora saranno

pag. 4

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 4m\ddot{\xi} + k_1(\xi - l \sin \vartheta) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\vartheta} + k_1(\xi - l \sin \vartheta)(-l \cos \vartheta) \\ \quad + q \xi l \sin \vartheta - k_2 l^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

(2) Punti di equilibrio e stabilità

Dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = k_1(\xi - l \sin \vartheta) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -k_1(\xi - l \sin \vartheta) l \cos \vartheta + q \xi l \sin \vartheta - k_2 l^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

Ponendo $\xi = l \sin \vartheta$ nella seconda equazione otteniamo

$$q \xi l \sin \vartheta - k_2 l^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

$$\rightarrow k_2 l^2 \sin \vartheta \left(\frac{q \xi}{k_2 l} - \cos \vartheta \right) = 0$$

$$\vartheta = 0, \pi$$

$$\vartheta = \pm \beta \text{ dove } \beta = \arccos\left(\frac{q \xi}{k_2 l}\right)$$

Risumando, le soluzioni di quiete | pag. 5
si hanno per

$$(\xi, \theta) \in \{(0, 0), (0, \pi), (\pm l \sin \beta, \pm \beta)\}$$

ovvero la seconda coppia di soluzioni esiste se β è ben definita, cioè quando $\frac{qE}{k_2 l} \leq 1$.

Per poter discutere la stabilità di questi punti di equilibrio, calcoliamo preliminarmente

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 l \cos \theta \\ -k_1 l \cos \theta & k_1 (\xi - l \sin \theta) \sin \theta + k_1 l^2 \cos^2 \theta + qEl \cos \theta - k_2 l^2 (2 \cos^2 \theta - 1) \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora i casi particolari.

- Caso $(\xi, \theta) = (0, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=0}} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 l \\ -k_1 l & k_1 l^2 + qEl - k_2 l^2 \end{pmatrix}$$

$$\det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=0}} = \cancel{k_1^2 l^2} - \cancel{k_1^2 l^2} + k_1 l (qE - k_2 l)$$

• Sottocaso $\frac{qE}{k_2 l} \leq 1 \Rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ autoval. neg.
 $\Rightarrow (0, 0)$ è INSTABILE

• Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}}{k_2\ell} > 1$

pag. 6

$$\Rightarrow \det > 0 \text{ e } T_2 \text{ Hess } U|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=0}} = k_1 + k_1\ell^2 + \ell(q\mathcal{E} - k_2\ell) > 0$$

$\Rightarrow$ 2 autoval. positivi $\Rightarrow (0,0)$ è STABILE

• Sottocaso $\frac{q\mathcal{E}}{k_2\ell} = 1$

$$\Rightarrow \det = 0 \text{ e } T_2 > 0 \Rightarrow 1 \text{ autoval. pos. e 1 nullo}$$

$\Rightarrow (0,0)$ necessita un supplemento di indagine.

- Caso $(\xi, \theta) = (0, \pi)$

$$\det \text{ Hess } U|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=\pi}} = \det \begin{pmatrix} k_1 & k_1\ell \\ k_1\ell & k_1\ell^2 - q\mathcal{E}\ell - k_2\ell^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{k_1^2\ell^2} - \cancel{k_1^2\ell^2} - k_1\ell(q\mathcal{E} + k_2\ell) < 0$$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow (0, \pi)$ è INSTABILE.

- Caso $(\xi, \theta) = (\pm \ell \sin \beta, \pm \beta)$

$$\text{Hess } U|_{\substack{\xi = \pm \ell \sin \beta \\ \theta = \pm \beta}} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1\ell \cos \beta \\ -k_1\ell \cos \beta & k_1\ell^2 \cos^2 \beta + q\mathcal{E}\ell \cos \beta - k_2\ell^2(2\cos^2 \beta - 1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H_{\text{ess}} U \Big|_{\substack{\xi = \pm l \sin \beta \\ \theta = \pm \beta}} = \cancel{k_1^2 l^2 \cos^2 \beta} - \cancel{k_1^2 l^2 \cos^2 \beta} + k_1 l \left(q \mathcal{E} \frac{q \mathcal{E}}{k_2 l} - 2 \cancel{k_1 l} \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{k_2^2 l^2} + k_2 l \right)$$

$$= k_1 l^2 \left(1 - \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{k_2^2 l^2} \right) > 0$$

~~titolo~~ • Sottocaso $\frac{q \mathcal{E}}{k_2 l} < 1$

Si come $\det > 0$ e l'elemento in alto sulla diagonale è k_1 che è sicuramente > 0 , allora la matr. è def. positiva $\Rightarrow$ 2 autovel. pos. $\Rightarrow$ p.t. di equilibrio STABILI

• Sottocaso $\frac{q \mathcal{E}}{k_2 l} = 1$

Si come $\det = 0$, e il primo elemento sulla diagonale è pos. $\Rightarrow$ 1 autovel. pos. e 1 nullo occorre un supplemento di analisi.

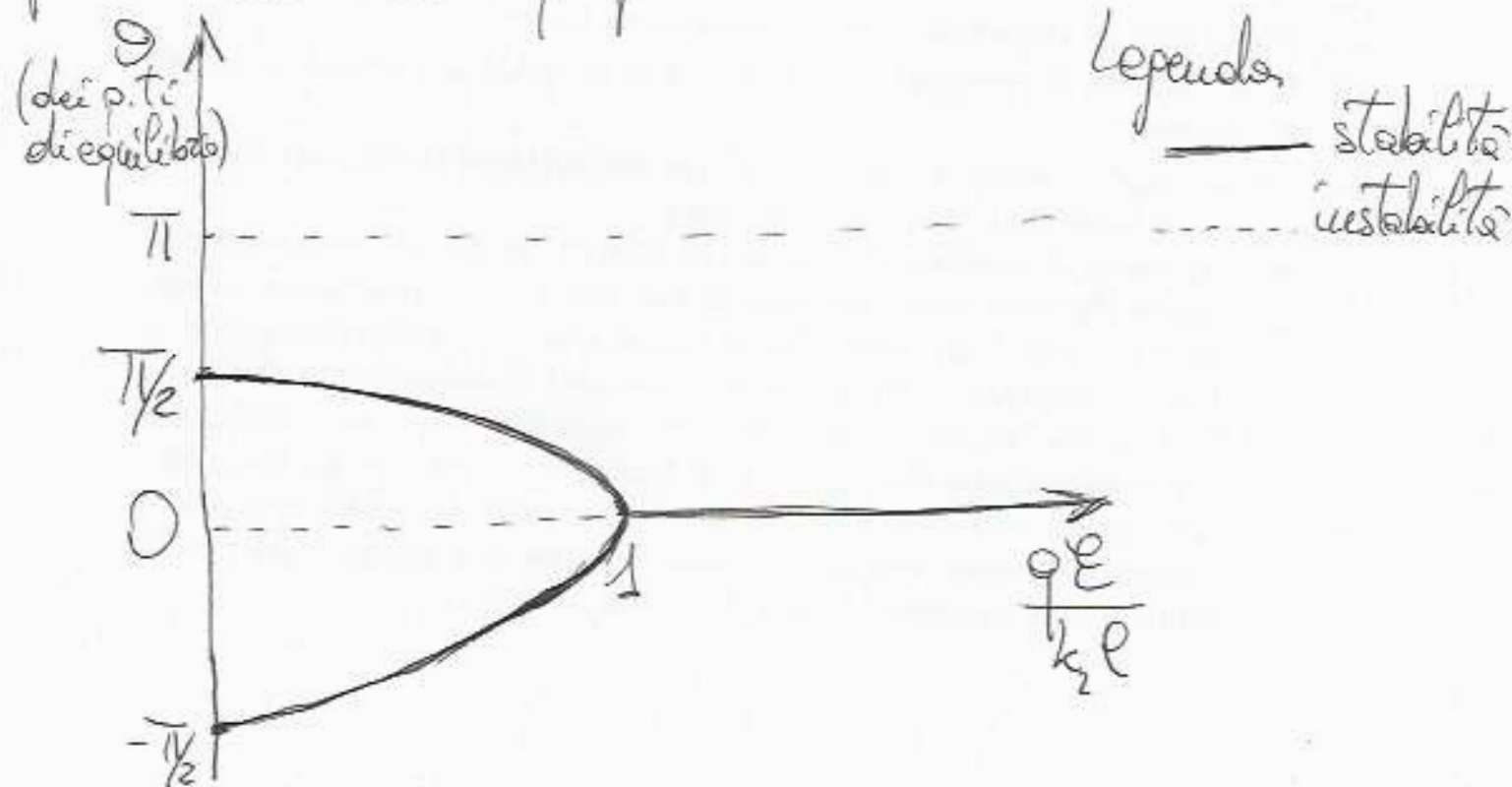
• Il sottocaso con $\frac{q \mathcal{E}}{k_2 l} > 1$ non si può perché sotto questa ipotesi i p.t. di equil. $(\pm l \sin \beta, \pm \beta) \nexists$.

Consideriamo ora, separatamente, | pag. 8
i sottocasi in cui è necessario un supplemento
di indagine; essi sono

$$(\xi, \theta) = (0, 0), (\pm l \sin \beta, \pm \beta) \text{ quando } \frac{qE}{k_2 l} = 1.$$

Ricordiamo che $\beta := \arccos \frac{qE}{k_2 l} = 0$, nel caso in esame,
cioè quando $\frac{qE}{k_2 l} = 1$. Di conseguenza, non abbiamo
3 sottocasi distinti, ma 1 solo cioè $(\xi, \theta) = (0, 0)$ con
la condizione $\frac{qE}{k_2 l} = 1$ sui parametri.

Facciamo il solito grafico riassuntivo dei risultati
finora ottenuti a proposito della stabilità.



Si riconosce, in $\theta = 0$ per $\frac{qE}{k_2 l} = 1$, la tipica situazione

della biforcazione a forchetta di un p.to di equilibrio stabile. Questo ci porta naturalmente a congetturare che $(0,0)$ sia stabile ~~da quando~~ quando $\frac{qE}{k_2 l} = 1$ (cioè nel cosiddetto "caso critico").

Procediamo con la verifica rigorosa di questa congettura.

Osserviamo che

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \inf_{\theta \in \mathbb{T}} U(\xi, \theta) = \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \inf_{\theta \in \mathbb{T}} \left[\frac{1}{2} k_1 (\xi - l \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2 \theta - q l \cos \theta \right] = +\infty$$

ne consegue che il potenziale deve avere un p.to di minimo "al finito" che, come è ben noto, deve essere compreso tra i p.ti stazionari; quindi gli unici candidati a essere p.to di minimo assoluto sono (per $\frac{qE}{k_2 l} = 1$)

$(0,0)$ e $(0,\pi)$.

Il secondo di questi p.ti è di sella (perché Hess U ha un autovel. pos. e uno neg.), quindi il p.to di minimo assoluto non può che essere $(0,0)$, che sarà p.to di equil. STABILE per il th. di Lagrange-Dirichlet.

(3) Si ponga $k_1 = 0$ e si scriva la hamiltoniana. | Pag. 10

(3A) Si determinino le costanti del moto.

(3B) Si scriva la hamiltoniana, ridotta a un grado di libertà, in modo da descrivere l'andamento della forma del rombo.

(3C) Si determinino tutte e sole le condizioni iniziali cui fanno seguito dei moti, tali (nell'ambito del formalismo hamiltoniano), tali che la superficie del rombo tende a zero quando $t \rightarrow \pm \infty$.

La lagrangiana, nel caso $k_1 = 0$, diventa

$$L = 2m\dot{\xi}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + q\mathcal{E}l\cos\theta - \frac{1}{2}k_2l^2\cos^2\theta$$

$\Rightarrow$ i momenti canonici sono

$$P_{\xi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = 4m\dot{\xi}, \quad P_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}ml^2\dot{\theta}$$

e la hamiltoniana è

$$H(P_{\xi}, P_{\theta}, \xi, \theta) = \frac{P_{\xi}^2}{8m} + \frac{3P_{\theta}^2}{8ml^2} - q\mathcal{E}l\cos\theta + \frac{1}{2}k_2l^2\cos^2\theta$$

Si osserva immediatamente che ξ è una variabile ciclica, quindi

$P_{\xi} = 4m\dot{\xi}$ è una costante del moto

Inoltre, siccome $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, anche l'energia ~~cinetica~~ totale

pag. 11

$$E = \frac{P_{\xi}^2}{2m} + \frac{3P_{\theta}^2}{8ml^2} - \cancel{qEl \cos \theta} - qEl \cos \theta + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2 \theta$$

è costante del moto.

Ci riduciamo a un solo grado di libertà scrivendo la Hamiltoniana

$$H(P_{\theta}, \theta) = \frac{3P_{\theta}^2}{8ml^2} - qEl \cos \theta + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2 \theta,$$

dove è stato omissso il grado di libertà che descrive la posizione del ~~ruota~~ centro C^* del rombo, per cui sappiamo che $\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial P_{\xi}} = \frac{P_{\xi}}{4m} \Rightarrow \xi(t) = \frac{P_{\xi}}{4m} t + \xi(0)$

con P_{ξ} costante det. dalle cond. iniz. cioè $P_{\xi} = 4m \dot{\xi}(0)$.
La Hamiltoniana H permette di calcolare le eq. del moto per θ (e P_{θ}), quindi descrive l'andamento della forma del rombo.

Facciamo una breve analisi qualitativa del moto, utilizzando la legge di conservazione

$$\frac{3P_{\theta}^2}{8ml^2} - qEl \cos \theta + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2 \theta = \left[\frac{3P_{\theta}^2}{8ml^2} + U(\theta) = E_{\theta} \right]$$

Dobbiamo quindi studiare il potenziale $U(\theta)$.

Calcoliamo

$$U'(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \left(qEl \cos \vartheta + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2 \vartheta \right)$$

pag. 12

$$= qEl \sin \vartheta + k_2 l^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$= k_2 l^2 \sin \vartheta \left(\frac{qE}{k_2 l} - \cos \vartheta \right)$$

Abbiamo quindi 2 possibili casi:

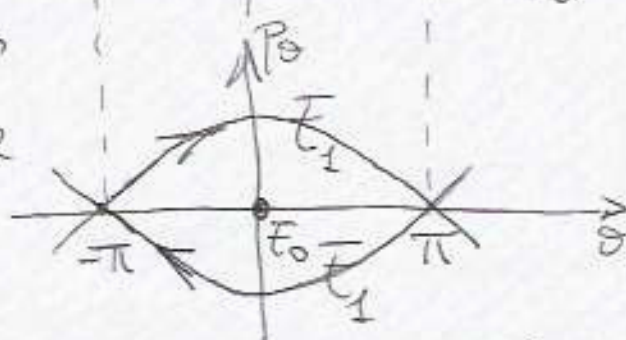
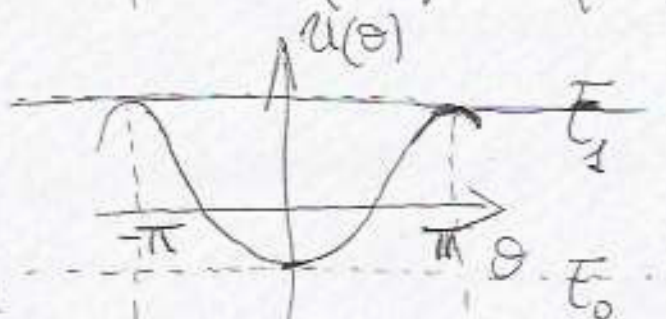
Se $\frac{qE}{k_2 l} \geq 1$ allora $U'(\vartheta) > 0$ per $\vartheta \in (0, \pi)$
 $U'(\vartheta) < 0$ per $\vartheta \in (-\pi, 0)$

Se $\frac{qE}{k_2 l} < 1$, allora $U'(\vartheta) > 0$ per $\vartheta \in (\beta, \pi)$ e $\vartheta \in (-\pi, -\beta)$

date si ricordi che $\beta = \arccos\left(\frac{qE}{k_2 l}\right)$ $U'(\vartheta) < 0$ per $\vartheta \in (0, \beta)$ e $\vartheta \in (-\pi, -\beta)$

Caso $\frac{qE}{k_2 l} \geq 1$, allora

il grafico del potenziale sarà come nella figura qui a destra (in alto). Siccome la superficie del rombo tende a zero se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \vartheta(t) = 0, \pi$, allora



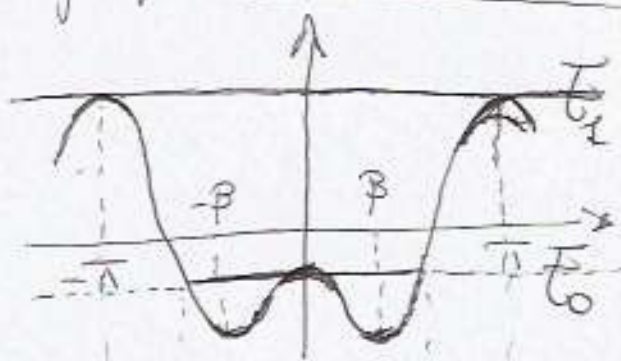
i livelli di energia che ci interessano sono quelli contrassegnati con E_0 e E_1 , quindi la risposta è

$$(P_\vartheta(0), \vartheta(0)) \in \{(0,0)\} \cup \{(P_0, \vartheta) : \frac{3P_0^2}{8ml^2} + U(\vartheta) = U(\pi) = qEl + \frac{1}{2} k_2 l^2\}$$

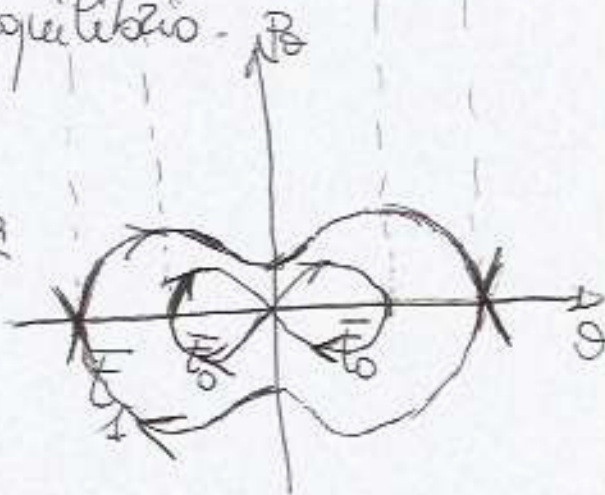
- Caso $\frac{q\mathcal{E}}{k_2 l} < 1$, allora il grafico

pag. 13

del potenziale sarà come nella figura qui a destra. Sempre perché la superficie del rimbombante tende a zero se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \vartheta(t) = 0, \pi$ (ci sarebbero anche i casi $\pm \pi/2$, ma non sono punti di equilibrio).



Anche in questo caso, ho due livelli di energia che mi interessano e che sono contrassegnati con E_0 e E_1 . Le condizioni iniziali richieste sono pertanto



$$(P_\vartheta(0), \vartheta(0)) \in \left\{ (P_\vartheta, \vartheta) : \frac{3P_\vartheta^2}{8ml^2} + U(\vartheta) = U(0) = -q\mathcal{E}l + \frac{1}{2}k_2 l^2 \right\}$$

$$\cup \left\{ (P_\vartheta, \vartheta) : \frac{3P_\vartheta^2}{8ml^2} + U(\vartheta) = q\mathcal{E}l + \frac{1}{2}k_2 l^2 \right\}.$$

Siccome questo modo di scrivere la risposta copre anche la risposta data nel primo caso, allora possiamo adottare quest'ultima come la risposta definitiva.

