

**II prova di esonero di Fisica Matematica 1**  
**Corso di laurea in Matematica**  
**5 giugno 2017**

Un sistema meccanico è costituito da quattro aste, che sono tutte di massa  $m$ , di lunghezza  $l$  e hanno densità di massa omogenea al loro interno. Queste quattro aste si muovono in un piano **orizzontale**  $Oxy$  e sono incernierate ai loro vertici, in modo da formare un rombo il cui rapporto tra le lunghezze delle diagonali è **variabile**. Si denotino, rispettivamente, con  $A$ ,  $C$ ,  $B$  e  $D$  i vertici delle aste; il dispositivo vincolare è realizzato in modo tale che i vertici  $A$  e  $B$  possono scorrere solo sull'asse delle  $y$ , mentre il vertice  $C$  è libero di muoversi sulla circonferenza di centro  $A$  e raggio  $l$ ; la posizione di ciascuna delle 4 aste che formano il rombo sarà automaticamente determinata di conseguenza. Nel sistema meccanico sono incluse due molle ideali, entrambe di lunghezza a riposo nulla e, rispettivamente, di costante elastica  $k_1$  e  $k_2$ . La prima molla collega il vertice  $A$  all'origine  $O$ , mentre la seconda è posta tra il vertice  $C$  e la sua proiezione  $C_*$  sull'asse delle  $y$  (si noti che il dispositivo vincolare è tale che  $C_*$  è il centro di simmetria del rombo). Inoltre, in  $C$  è posta anche una carica elettrica  $q$ , che è soggetta agli effetti di un campo elettrico uniforme di norma uguale a  $\mathcal{E}$ , parallelo ed equiverso all'asse  $x$ .

È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero  $m$ ,  $l$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $q$  e  $\mathcal{E}$ , abbiano valori reali positivi. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo che le aste possano attraversarsi l'un l'altra, senza scontrarsi. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Limitatamente al caso in cui  $k_1 = 0$ , si scriva la Hamiltoniana del sistema.
  - (3A) Si determinino le costanti del moto.
  - (3B) Si riduca il sistema a un grado di libertà, in modo da scrivere una nuova Hamiltoniana associata al solo moto della coordinata che descrive la forma del rombo; deve quindi essere separato quel grado di libertà corrispondente a una delle costanti di cui al punto (3A).
  - (3C) Nell'ambito del formalismo Hamiltoniano (cioè in termini della suddetta coordinata che descrive la forma del rombo e del momento cinetico ad essa associato), si determinino tutte e sole le condizioni iniziali cui fanno seguito dei moti, tali che la superficie del rombo tende a zero quando il tempo  $t \rightarrow \pm\infty$ .