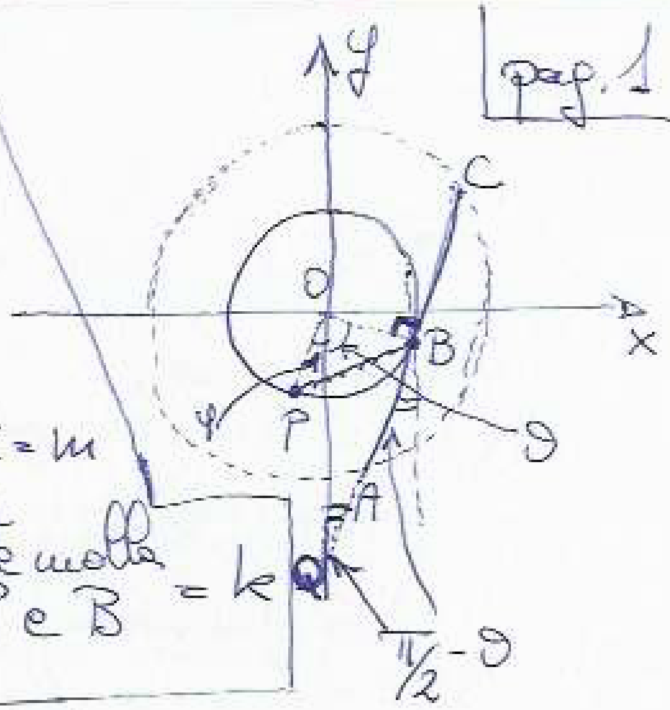
Esame scritto di FM1
Settembre 2017



$\overline{OP} = \overline{OB} = R$ massa $P = m$

$\overline{OA} = \overline{OC} = 2R$ massa asta $AC = m$

massa anello (in cui è incastonato P) $= m$ costante molla tra P e B $= k$

---

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

Scegliamo come coordinate libere gli angoli θ e φ, i quali (come indicato in figura) sono delimitati dalla semiretta uscente da O ~~e formata~~ delle ordinate negative e, rispettivamente, da OB o da OP.

Coordinate di B: $R(\sin\theta, -\cos\theta)$

" " P: $R(\sin\varphi, -\cos\varphi)$

$\overline{AB} = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = \sqrt{3}R$

$\Rightarrow$ lunghezza asta $= \overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB} = 2\sqrt{3}R$

Applichiamo il teorema di König all'asta per poterne calcolare l'energia cinetica:

$$T_{asta} = \frac{1}{2} m \underline{V}_B \cdot \underline{V}_B + \frac{1}{2} I_{asta} \dot{\vartheta}^2 ,$$

dove $\underline{V}_B$ è la velocità del baricentro, cioè

$$\underline{V}_B = R\dot{\vartheta}(\cos\vartheta, \sin\vartheta);$$

inoltre, ~~de~~ la velocità angolare di rotazione dell'asta attorno al baricentro è stata posta uguale a $-\dot{\vartheta}$, perché l'angolo formato dall'asta con la verticale discendente è $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ (come si vede dalla figura, dove Q è ~~la~~ l'intersezione tra l'asse delle y e il prolungamento di AC, quindi il triangolo OBQ è rettangolo).

Ricordiamo che

$$I_{asta} = \frac{m\,\overline{AC}^2}{12} = \frac{m(2\sqrt{3})^2 R^2}{12} = \frac{m \cdot \cancel{12} \cdot R^2}{\cancel{12}} = mR^2$$

$$\Rightarrow T_{asta} = \frac{1}{2} mR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} mR^2\dot{\vartheta}^2 = mR^2\dot{\vartheta}^2$$

Per poter effettuare il computo totale dell'energia cinetica, scriviamo

$$T = T_{asta} + \frac{1}{2} m \underline{V}_P \cdot \underline{V}_P + T_{anello} ,$$

dove $\underline{V}_P \cdot \underline{V}_P = R^2\dot{\varphi}^2$ e $T_{anello} = \frac{1}{2} I_{anello} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2$, quindi si ottiene che

$$T = mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2$$

Passiamo al calcolo dell'energia potenziale, che si compone di 3 contributi come nella formula seguente:

$$U = mg\,y_B + mg\,y_P + \frac{1}{2}k\overline{BP}^2,$$

dove non compare il ~~contributo~~ termine di energia potenziale gravitazionale dell'anello, poiché il suo baricentro è sempre sovrapposto all'origine e, quindi, non cambia la sua quota verticale.

$$\overline{BP}^2 = R^2\left[(\sin\theta - \sin\varphi)^2 + (\cos\theta - \cos\varphi)^2\right]$$

$$= R^2\big(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi - 2\sin\theta\sin\varphi$$

$$- 2\cos\theta\cos\varphi\big) = R^2\big(2 - 2\cos(\theta-\varphi)\big).$$

Di conseguenza, abbiamo che

$$U = -mgR\cos\theta - mgR\cos\varphi - kR^2\cos(\theta-\varphi),$$

dove è stata omessa una costante additiva.

La lagrangiana è quindi

$$L = mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + mgR\cos\theta + mgR\cos\varphi + kR^2\cos(\theta-\varphi).$$

Le eq. di Lagrange si scrivono come segue:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} - \dfrac{\partial L}{\partial \vartheta} = 2mR^2\ddot\vartheta + mgR\sin\vartheta + kR^2\sin(\vartheta-\varphi) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 2mR^2\ddot\varphi + mgR\sin\varphi + kR^2\sin(\varphi-\vartheta) = 0 \end{cases}$$

---

(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri.

Per determinare i punti di equilibrio, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = mgR\sin\vartheta + kR^2\sin(\vartheta-\varphi) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = mgR\sin\varphi + kR^2\sin(\varphi-\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le eq. precedenti, si ottiene $\sin\vartheta = -\sin\varphi$

$$\vartheta = -\varphi \qquad\qquad \vartheta = \varphi + \pi$$

Immettiamo la relazione $\varphi = -\vartheta$ nella prima eq. del sistema, cioè quella proveniente dalla condizione $\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$; allora otteniamo:

$$mgR\sin\vartheta + kR^2\sin(2\vartheta) = 0$$

$$\Rightarrow R\sin\vartheta\left(mg + 2kR\cos\vartheta\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$\sin\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \pi \Rightarrow \varphi = 0, \pi$

$\cos\vartheta = -\frac{mg}{2kR}$, che ammette soluz. sse $\frac{mg}{2kR} \leq 1$. $\Rightarrow \vartheta = \pm\beta$ dove $\beta = \arccos\left(-\frac{mg}{2kR}\right) \Rightarrow \varphi = \mp\beta$

Ora immettiamo la relazione $\varphi = \vartheta - \pi$ nell'eq. $\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$, ottenendo così:

$$mgR\sin\vartheta + kR^2 \cdot \sin\pi = mgR\sin\vartheta = 0$$

$$\Rightarrow \vartheta = 0, \pi \Rightarrow \varphi = \pi, 0.$$

Riassumendo, abbiamo che i punti di equilibrio sono 6:

$$(\vartheta, \varphi) \in \{(0,0), (\pi,\pi), (\pi,0), (0,\pi), (\pm\beta, \mp\beta)\}$$

dove l'ultima coppia di punti di equilibrio esiste sse

$$\frac{mg}{2kR} \leq 1 \,.$$

Allo scopo di determinare la stabilità dei suddetti punti di equilibrio, è conveniente calcolare l'hessiano del potenziale, cioè

$$\text{Hess}\, U = \begin{pmatrix} mgR\cos\vartheta + kR^2\cos(\vartheta-\varphi) & -kR^2\cos(\vartheta-\varphi) \\ -kR^2\cos(\vartheta-\varphi) & mgR\cos\varphi + kR^2\cos(\varphi-\vartheta) \end{pmatrix}$$

Passiamo a considerare, separatamente, ciascuno dei p.ti di equilibrio

- Caso $(\vartheta, \varphi) = (0,0)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\vartheta=\varphi=0} = \begin{pmatrix} mgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & mgR + kR^2 \end{pmatrix}$$

Ne segue che

$$\det \mathrm{Hess}\, U\Big|_{\theta=\varphi=0} = \left(mgR+kR^2\right)^2 - k^2R^4 =$$

$$= m^2g^2R^2 + 2mgkR^3 > 0$$

Siccome $\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\theta=\varphi=0} = 2\left(mgR+kR\right) > 0$,

abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ pto di eq. STABILE

- Caso $(\theta,\varphi) = (\pi,\pi)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\theta=\varphi=\pi} = \begin{pmatrix} -mgR+kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & -mgR+kR^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \mathrm{Hess}\, U\Big|_{\theta=\varphi=\pi} = m^2g^2R^2 - 2mgkR^3 =$$

$$= m^2g^2R^2\left(1 - \frac{2kR}{mg}\right).$$

Inoltre, $\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\theta=\varphi=\pi} = -2mgR\left(1 - \frac{kR}{mg}\right)$

Distinguiamo vari casi:

- Sottocaso $\frac{kR}{mg} < \frac{1}{2} \Rightarrow \det \mathrm{Hess} > 0$ e $\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess} < 0$

$\Rightarrow$ 2 autoval. neg. $\Rightarrow$ p.to di eq. INSTABILE

- Sottocaso $\frac{kR}{mg} = \frac{1}{2} \Rightarrow \det Hess = 0$
e $Tr\, Hess < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. neg e 1 nullo
$\Rightarrow$ p.to di eq. INSTABILE
- Sottocaso $\frac{kR}{mg} > 1/2 \Rightarrow \det Hess < 0$
1 autoval. neg e 1 pos. $\Rightarrow$ p.to di eq. INST.

Possiamo quindi concludere che (π, π) è sempre instabile, per ogni valore dei parametri.

_ Caso $(\theta, \varphi) = (0, \pi)$

$$Hess\, U\Big|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\pi}} = \begin{pmatrix} mgR - kR^2 & +kR^2 \\ +kR^2 & -mgR - kR^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det Hess\, U\Big|_{\substack{\theta=0\\ \varphi=\pi}} = -m^2 g^2 R^2 + \cancel{k^2R^4} - \cancel{k^2R^4} < 0$$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.to di eq. INSTABILE

_ Caso $(\theta, \varphi) = (\pi, 0)$

$$Hess\, U\Big|_{\substack{\theta=\pi\\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} -mgR - kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & mgR - kR^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \operatorname{Hess} U\Big|_{\substack{\theta=\pi\\ \varphi=\pi}} = -m^2g^2R^2$$

$\Rightarrow$ p.to di eq. INSTABILE (è un caso analogo a quello precedente)

- Caso $(\theta,\varphi) = (\pm\beta, \mp\beta)$

$$\operatorname{Hess} U\Big|_{\substack{\theta=\pm\beta\\ \varphi=\mp\beta}} = \begin{pmatrix} mgR\cos\beta + kR^2\cos 2\beta & -kR^2\cos 2\beta \\ -kR^2\cos 2\beta & mgR\cos\beta + kR^2\cos 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \operatorname{Hess} U\Big|_{\substack{\theta=\pm\beta\\ \varphi=\mp\beta}} = m^2g^2R^2\cos^2\beta + 2mg\,kR^3\cos\beta\cos 2\beta$$

$$= m^2g^2\cancel{R^2}\,\frac{m^2g^2}{4k^2\cancel{R^2}} + 2mg\,kR^3\left(\frac{-mg}{2kR}\right)\cdot\left(\frac{2m^2g^2}{4k^2R^2} - 1\right)$$

$$= \frac{m^4g^4}{4k^2} - \frac{2m^4g^4}{4k^2} + m^2g^2R^2$$

$$= m^2g^2R^2\left(1 - \frac{m^2g^2}{4k^2R^2}\right)$$

Siccome $\frac{mg}{2kR} \leq 1$ (altrimenti questi p.ti di equilibrio non esisterebbero), allora $\det \operatorname{Hess} U \geq 0$.

Prima di studiare la traccia, osserviamo che

$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2\,\dfrac{m^2 g^2}{4k^2R^2} - 1,$

quindi

$$\operatorname{Tr}\operatorname{Hess} U\Big|_{\substack{\theta=\pm\beta\\ \varphi=\mp\beta}} = 2mgR\cos\beta + 2kR^2\cos 2\beta$$

$$= \cancel{2}mgR\,\frac{mg}{\cancel{2}kR} + \cancel{2}\cancel{k}\cancel{R^2}\,\frac{\cancel{2}m^2g^2}{\cancel{4}k^{\cancel{2}}\cancel{R^2}} - 2kR^2$$

$$= \frac{m^2g^2}{k} + \frac{m^2g^2}{k} - 2kR^2$$

$$\cancel{= \frac{2m^2g^2}{k}\left(1 - \frac{m^3g^2}{\ }\right)}$$

$$= 2kR^2\left(\frac{m^2g^2}{k^2R^2} - 1\right).$$

Siccome $\dfrac{mg}{2kR} \le 1$, allora $\dfrac{mg}{kR} \le 1/2 \Rightarrow \dfrac{m^2g^2}{k^2R^2} < 1$

$\Rightarrow \operatorname{Tr}\operatorname{Hess} U < 0$, quindi $\exists$ almeno 1 autoval. neg. (anzi, siccome $\det \operatorname{Hess} \geq 0$, l'altro sarà sempre neg. a parte nel caso $\dfrac{mg}{2kR} = 1$, quando sarà nullo) $\Rightarrow$ p.ti di eq. <u>INSTABILI</u>

— o —

(3) Si considerino condizioni iniziali t.c. sia il punto P che il baricentro B dell'asta sono in quiete e, rispettivamente sulla bisettrice del terzo e del quarto quadrante.

(3A) Limitatamente al caso $mg = kR$, Si verifichi che il moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali è periodico ed è tale che durante le oscillazioni, la molla che collega B a P è sempre in orizzontale pur cambiando la quota verticale.

(3B) Detto T il periodo di oscillazione del moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali, si determinino 2 valori di soglia $T_\pm$ (per la stima di T), tali che valga la disuguaglianza $T_- \leq T \leq T_+$ e l'incertezza $\dfrac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-}$ sia inferiore al 50%

(3A)

———— o ————

Traducendo la descrizione delle condizioni iniziali in termini delle coordinate libere o lagrangiane si ottiene che

$$\vartheta(0) = \pi/4\,, \quad \varphi(0) = -\frac{\pi}{4}\,, \quad \dot\vartheta(0) = \dot\varphi(0) = 0.$$

La richiesta ~~che~~ che la molla sia sempre in orizzontale (~~d~~alle condizioni iniziali inizialmente) suggerisce che ~~...~~ durante il moto $\vartheta(t) = -\varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, cioè che le posizioni di B e di P siano sempre speculari rispetto all'asse delle y.

Indaghiamo l'esistenza di queste soluzioni "speculari" rispetto all'asse y.

Consideriamo leggi del moto del tipo

$$t \mapsto \left(\vartheta(t) = \alpha(t),\ \varphi(t) = -\alpha(t)\right),$$

le quali sono soluzioni delle eq. di Lagrange a condizione che sia soddisfatta l'eq.

$$2mR^2\ddot\alpha + mgR\sin\alpha + kR^2\sin(2\alpha) = 0,$$

che si ottiene da <u>entrambe</u> le eq. di Lagrange, dopo aver posto $\vartheta = +\alpha$ $\varphi = -\alpha$.

Il problema di Cauchy che si ottiene ~~con~~ con do l'eq. diff. relativa a $\alpha(t)$ e le cond. iniz.

Si può ~~sicuramente~~ scrivere come segue:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = -\dfrac{g}{2R}\sin\alpha - \dfrac{k}{2m}\sin(2\alpha) \\ \alpha(0) = \pi/4 \qquad \dot{\alpha}(0) = 0 \end{cases}$$

Siccome il membro di destra dell'eq. diff. (che è stata posta in forma normale) è regolare, allora sicuramente $\exists\ t \mapsto \alpha(t)$ che risolve quel problema di Cauchy.

Ne segue che la legge del moto

$$t \mapsto (\theta(t) = \alpha(t),\ \varphi(t) = -\alpha(t))$$

risolve il problema di Cauchy di partenza, cioè

$$\begin{cases} 2mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta + kR^2\sin(\theta-\varphi) = 0 \\ 2mR^2\ddot{\varphi} + mgR\sin\varphi + kR^2\sin(\varphi-\theta) = 0 \\ \theta(0) = \pi/4 \qquad \varphi(0) = -\pi/4 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

Siccome anche quest'ultimo è un problema ben posto allora la legge del moto

$t \mapsto (\alpha(t), -\alpha(t))$ è l'unica soluzione

di quel problema di Cauchy.
A questo punto, occorre verificare che la soluzione è periodica. A tale scopo, riconsideriamo l'eq. diff. ε

$$2mR^2\ddot{\alpha} + mgR\sin\alpha + kR^2\sin(2\alpha) = 0 .$$

Osserviamo che essa può essere vista come un'eq. di un problema di meccanica 1D con forze puramente posizionali, per cui si conserva la seguente funzione energia:

$$mR^2\dot{\alpha}^2 + U(\alpha) = E ,$$

dove $U(\alpha) := \int d\alpha \left[mgR\sin\alpha + kR^2\sin(2\alpha) \right]$

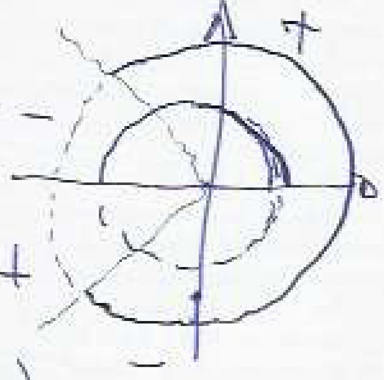
$$= -mgR\cos\alpha - \frac{kR^2}{2}\cos(2\alpha)$$

Vogliamo studiare qualitativamente il moto che fa seguito al prob. di Cauchy risolto dalla funzione $t \mapsto \alpha(t)$; è quindi importante studiare il segno di

$$U'(\alpha) = mgR\sin\alpha + kR^2\sin(2\alpha) =$$

$$= mgR\sin\alpha\,(1+2\cos\alpha)$$, dove abbiamo usato che $mg = kR$

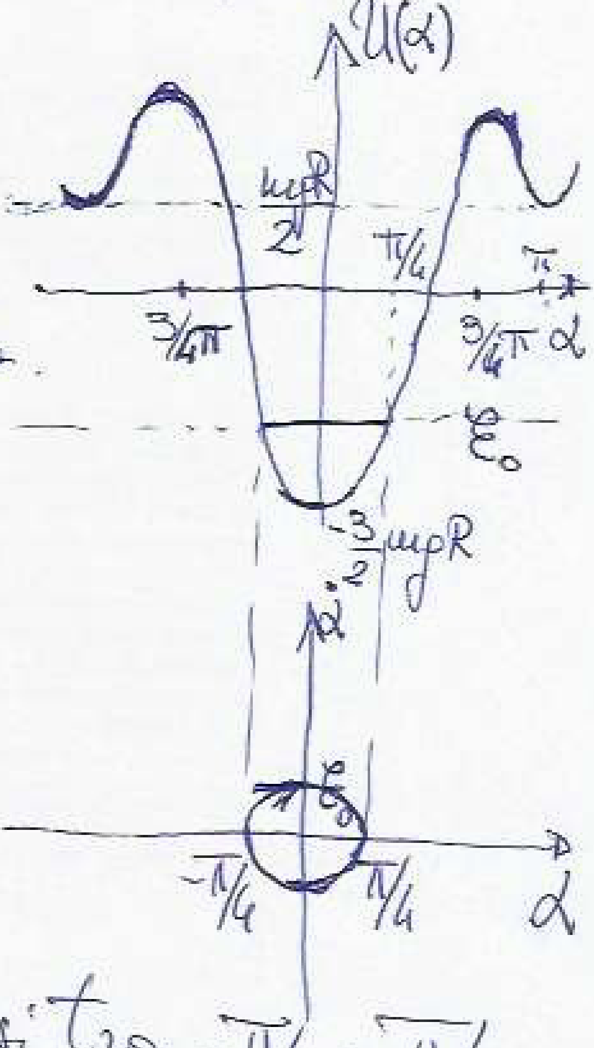
$U'(\alpha) > 0$ per $\alpha \in \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ e $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right)$



$U'(\alpha) < 0$ per $\alpha \in \left(\frac{3}{4}\pi, \pi\right)$ e $\alpha \in \left(-\frac{3}{4}\pi, 0\right)$

Il profilo dell'energia potenziale ha quindi l'aspetto disegnato qui a destra. Il valore di energia

$$\mathcal{E}_0 = U(\pi/4)$$



corrisponde, evidentemente a un'orbita periodica che oscilla per valori di α compresi tra $-\pi/4$ e $\pi/4$. Per determinare l'estremo sinistro di oscillazione $\alpha_- = -\pi/4$ abbiamo utilizzato il fatto che U è pari e quindi $\alpha_- = -\alpha_+ = -\pi/4$.

Per stimare il periodo di oscil-lazione, cominciamo a calcolare

$$U''(\alpha) = mgR\left(\cos\alpha + 2\cos(2\alpha)\right)$$

Siccome è evidente che

$$\cos\alpha + 2\cos(2\alpha) > 0 \ \forall \alpha \in [\alpha_-, \alpha_+] = [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}]$$

allora possiamo provare ad applicare la stima

$$\frac{T_-}{2\pi} := \sqrt{\frac{2mR^2}{\max\limits_{\alpha\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} U''(\alpha)}} \le \frac{T}{2\pi} \le \sqrt{\frac{2mR^2}{\min\limits_{\alpha\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]} U''(\alpha)}} =: \frac{T_+}{2\pi}$$

Calcoliamo ora

$$U'''(\alpha) = -mgR\left(\sin\alpha + 4\sin(2\alpha)\right)$$

U''' è una funz. dispari, t.c. $U'''(0) = 0$ e evidentemente $U'''(\alpha) < 0 \ \forall \alpha \in (0, \pi/4]$; allora $U''(\alpha)$ ha un p.to di max. in $\alpha = 0$ e

$$\min_{\alpha\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]} U''(\alpha) = U''\left(\frac{\pi}{4}\right) = U''\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

Possiamo quindi concludere che

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR\left(\cos 0 + 2\cos(2\cdot 0)\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}}$$

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR\left(\cos\frac{\pi}{4} + 2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{\frac{\sqrt{2}}{2}g}}$$

sono t.c. vale la catena di disuguaglianze

$$T_- \leq T \leq T_+$$

e $\dfrac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}} - 1/\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{2}} + 1/\sqrt{3}} \simeq 34.6\%$

come richiesto dal testo dell'esercizio.