

Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
22 Settembre 2017

Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P , da un anello e da un'asta, i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale Oxy , con asse delle y verticale ascendente. Tutti e tre questi oggetti (il punto, l'anello e l'asta) sono di massa m . L'anello è perfettamente rigido, di spessore infinitesimo, di raggio R e di densità di massa omogenea al suo interno; esso ha il suo centro costantemente sovrapposto all'origine O , ma è libero di ruotare attorno all'origine. Il punto P è "incastonato" nell'anello (in altri termini, "si muovono insieme"). Anche l'asta è perfettamente rigida e di densità di massa omogenea al suo interno. Essa è vincolata in modo tale che il suo baricentro B si può muovere mantenendosi sempre a distanza R dall'origine, mentre i vertici A e C dell'asta possono scorrere sulla circonferenza di raggio $2R$ e centrata nell'origine. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega B a P .

Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo che l'asta possa scorrere senza attrito sull'anello e attraversare il punto P senza scontrarsi con esso. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si considerino i moti che fanno seguito a delle *condizioni iniziali* tali che sia il punto P che il baricentro B sono in quiete e stanno, rispettivamente, sulla bisettrice del terzo e del quarto quadrante. Ci si limiti a considerare il caso in cui $mg = kR$.
- (3A) Si verifichi che il moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali è periodico ed è tale che, durante le oscillazioni, la molla che collega B a P è sempre in posizione orizzontale, pur cambiando la sua quota verticale.
- (3B) Si dia una stima del periodo \mathcal{T} del moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali, determinando *esplicitamente* due numeri reali positivi \mathcal{T}_- e \mathcal{T}_+ , tali che sussiste la catena di disuguaglianze $\mathcal{T}_- \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_+$ e l'errore relativo della stima, cioè

$$\frac{\mathcal{T}_+ - \mathcal{T}_-}{\mathcal{T}_+ + \mathcal{T}_-},$$

è inferiore al 50%.