

Fisica Matematica 1

pag. 1

esame di luglio 2017

Raggio anello = $R = OQ$

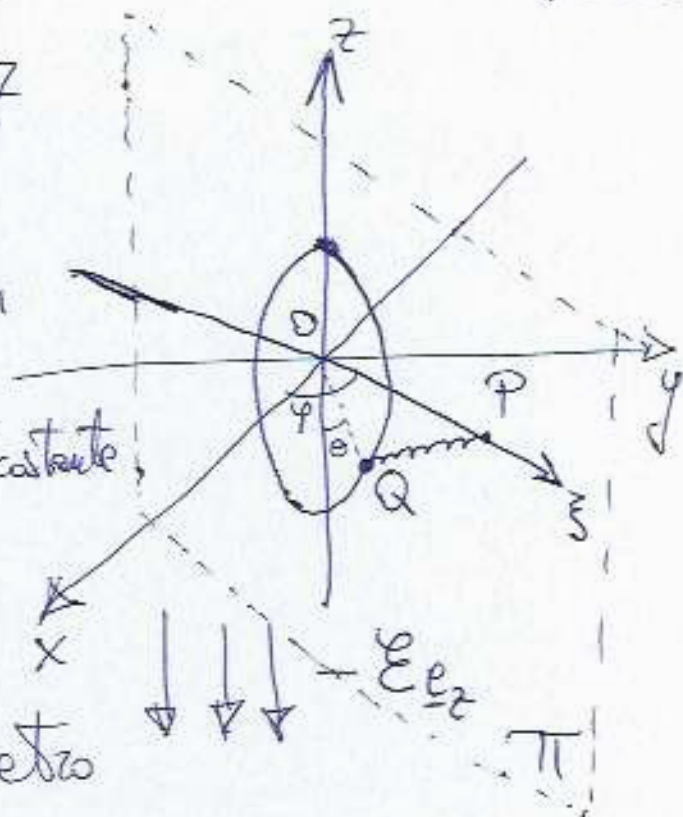
massa anello = M massa $P = m$

carica di $Q = q$

Campo elettrico: $-E \underline{e}_z$ con E costante

Costante molla tra Q e $P = k$

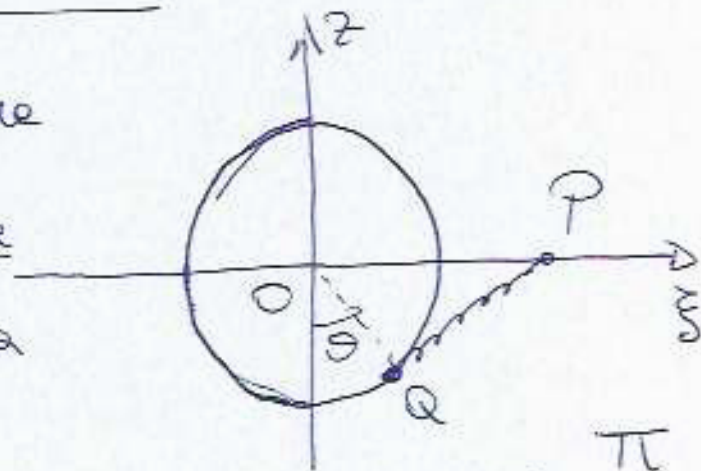
P su una guida rettilinea,
cui appartiene anche il diametro
dell'anello.



(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange

Scegliamo come coordinate libere

(ξ, θ, φ) , così come sono rappresentate nella figura in alto a destra di questa pagina.



È conveniente riferirsi preliminarmente, al piano Π in cui giace la guida rettilinea, su cui si muove P , al fine di determinare le coordinate 3D dei punti P e Q . Infatti, è semplice calcolare le coordinate in Π : Coord. di P : $(\xi_P, z_P) = (\xi, 0)$, Coord. di Q : $(\xi_Q, z_Q) = R(\sin \theta, 0)$

È immediato comprendere che, per
rotazione di un angolo θ , valgono le
seguenti relazioni: [pag. 2]

$$\begin{cases} x_Q = \xi_Q \cos \varphi \\ y_Q = \xi_Q \sin \varphi \\ z_Q = z_Q \end{cases}, \quad \begin{cases} x_P = \xi_P \cos \varphi \\ y_P = \xi_P \sin \varphi \\ z_P = z_P \end{cases}.$$

Di conseguenza, possiamo scrivere le coordinate
3D nel modo seguente:

$$\text{Coord. di } Q: R(\xi \sin \theta \cos \varphi, \xi \sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta)$$

$$\text{Coord. di } P: (\xi \cos \varphi, \xi \sin \varphi, 0)$$

Per calcolare l'energia cinetica, dobbiamo considera-
re i 2 oggetti che hanno massa, cioè l'anello e il punto
materiale. Sia G un generico punto sull'anello,
che si trova a un angolo α da Q , allora

$$\text{Coord di } G: R(\sin(\theta+\alpha) \cos \varphi, \sin(\theta+\alpha) \sin \varphi, -\cos(\theta+\alpha))$$

$$\rightarrow \underline{V}_G = R \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos(\theta+\alpha) \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin(\theta+\alpha) \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos(\theta+\alpha) \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin(\theta+\alpha) \cos \varphi \\ \dot{\theta} \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$$

L'energia cinetica dell'anello sarà quindi

$$T_{\text{anello}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R d\alpha \underline{V}_G \cdot \underline{V}_G, \text{ dove } \delta = \frac{M}{2\pi R} \text{ è la}$$

densità di massa dell'anello. [pag. 3]

Andando a sostituire si ottiene

$$\begin{aligned} T_{\text{anello}} &= \frac{1}{2} \frac{\mu R^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} d\alpha \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta + \alpha) \right) \\ &= \frac{\mu R^2}{2\pi} \dot{\theta}^2 \int_0^{2\pi} d\alpha + \frac{\mu R^2}{2\pi} \dot{\varphi}^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \sin^2(\theta + \alpha) = \\ &= \frac{\mu R^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\mu R^2}{2} \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Si osserva che si poteva arrivare allo stesso risultato, dopo aver osservato che

- (1) L'anello può ruotare in 2 modi indipendenti con rotazioni di ~~angolo~~ rispetto all'angolo θ e rispetto all'angolo φ ;
- (2) Siccome le 2 rotazioni sono ortogonali tra loro e, quindi, lo saranno anche le rispettive componenti delle velocità, allora i contributi all'energia cinetica, che sono dovuti alle rotazioni, sono disaccoppiati;
- (3) Per il punto (2), abbiamo che

$$T_{\text{anello}} = \frac{1}{2} I_{\varphi} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{\theta} \dot{\theta}^2,$$

dove I_{φ} e I_{θ} sono i momenti di inerzia per

rotazioni attorno all'asse z di angoli φ e θ rispettivamente.

pag. 4

(4) È facile calcolare i valori di

$$I_{\varphi} = \frac{MR^2}{2} \quad \text{e} \quad I_{\theta} = \frac{MR^2}{2}.$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica del punto P , basta calcolare

$$\frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 \dot{\varphi}^2,$$

in accordo con il fatto che le coord. di P sono sostanzialmente quelle polari nel piano.

Sommandoli i vari addendi, si ottiene quindi l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(m \dot{\xi}^2 + \frac{MR^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2$$

Passiamo ora al calcolo dell'energia potenziale. Osserviamo che, siccome né il baricentro dell'aula né il punto P cambiano mai la loro quota verticale, allora l'energia potenziale gravitazionale non influenza la dinamica e, quindi, può essere messa.

Possiamo riassumere tutti i contributi | pag. 5
 ti all'energia potenziale, con la formula
 seguente:

$$U = q \mathcal{E} z_Q + \frac{1}{2} k \overline{PQ}^2$$

dove il calcolo dell'energia potenziale elettrica è
 immediato, per analogia a quella gravitazionale;
 infatti, usualmente ~~la~~ il contributo gravitazionale
 alla forza è $-\mu g \underline{e}_z$ (dove μ è la massa e l'asse
 delle z è verticale ascendente), mentre quello elettrico
 è $-q \mathcal{E} \underline{e}_z$, in questo caso.

Non ci resta che andare a sostituire le espressioni
 di z_Q e di $\overline{PQ}^2$ in funzione delle coordinate
 libere o lagrangiane (per quanto riguarda il calcolo
 di $\overline{PQ}^2$ è ovviamente assai più semplice se viene
 effettuato nel piano Π) - Si tiene allora che

$$U = -q \mathcal{E} R \cos \theta + \frac{1}{2} k (\xi^2 - 2R\xi \sin \theta)$$

dove è stata messa un'inessenziale costante
 additiva. Possiamo finalmente scrivere la lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(m \xi^2 + \frac{M R^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2 + q \mathcal{E} R \cos \theta - \frac{1}{2} k \xi^2 + k R \xi \sin \theta$$

Le equazioni di Lagrange assumono la forma seguente: pag. 6

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = m \ddot{\xi} - m \dot{\varphi}^2 \xi + k \xi - k R \sin \vartheta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = M R^2 \ddot{\vartheta} + q E R \sin \vartheta - k R \xi \cos \vartheta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \left[\left(m \xi^2 + \frac{M R^2}{2} \right) \dot{\varphi} \right] = 0 \end{cases}$$

dove nella terza equazione abbiamo lasciato indicato la derivata totale rispetto al tempo, per sottolineare che

$\left(m \xi^2 + \frac{M R^2}{2} \right) \dot{\varphi}$ è una costante del moto!

Inoltre, si conserva l'energia totale $E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \left(m \xi^2 + \frac{M R^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2 - q E R \cos \vartheta + \frac{1}{2} k \xi^2 - k R \xi \sin \vartheta$

(2) Si consideri ora il sistema soggetto all'ulteriore vincolo che la velocità angolare Ω del piano Π è fissato in modo t.c.

$$\dot{\varphi} = \Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Si determinino le soluzioni di quiete rispetto al piano (rotante) Π e se ne studi la stabilità.

al variare dei parametri | pag. 7

Se introduciamo il vincolo che $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, possiamo scrivere la ~~lagrangiana~~ ^{lagrangiana}, che descrive il moto nel piano π :

$$\begin{aligned} L(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) &= L\left(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + q E R \cos \theta + \frac{1}{2} k \xi^2 + k R \xi \sin \theta, \end{aligned}$$

dove ~~è~~ stata omessa la inessenziale costante additiva $\frac{M R^2 k}{2 m}$.

È immediato effettuare una nuova classificazione $L = T - U$, dove T contiene i termini cinetici (quadratici nelle velocità) e U i termini potenziali (indipendenti dalle velocità). Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} L = T - U \quad \text{con} \quad T &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 \\ \text{e} \quad U &= -\frac{1}{2} k \xi^2 - q E R \cos \theta - k R \xi \sin \theta. \end{aligned}$$

Per determinare le soluzioni di equilibrio,

abbiamo risolvere il sistema

pag. 8

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = -k\xi - kR \sin \vartheta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = qER \sin \vartheta - kR\xi \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

Dalla prima eq. segue che

$$\xi = -R \sin \vartheta,$$

quest'ultima relazione, introdotta nell'eq. $\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$, ci fornisce un'equazione in una sola incognita:

$$qER \sin \vartheta + kR^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

$$\Rightarrow R \sin \vartheta (qE + kR \cos \vartheta) = 0$$

$$\swarrow$$
$$\sin \vartheta = 0$$

$$\Downarrow$$
$$\vartheta = 0, \pi$$

$$\searrow$$
$$\cos \vartheta = -\frac{qE}{kR}$$

$$\Downarrow$$
$$\vartheta = \pm \beta, \text{ dove } \beta = \arccos\left(-\frac{qE}{kR}\right)$$

che è definito perché $\frac{qE}{kR} \leq 1$.

Riassumendo, abbiamo le seguenti soluzioni di equilibrio: pag. 9

$$(\xi, \vartheta) = \left\{ (0, 0), (0, \pi), (\pm R \sin \beta, \pm \beta) \right\}$$

dove la seconda coppia di punti di equilibrio esiste se e solo se

$$\boxed{\frac{qE}{kR} \leq 1}.$$

Per discutere la stabilità dei punti di equilibrio, calcoliamo

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} -k & -kR \cos \vartheta \\ -kR \cos \vartheta & qER \cos \vartheta + kR\xi \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Studiamo gli autovalori dell'Hessiano in corrispondenza ai vari punti di equilibrio.

- Caso $(\xi, \vartheta) = (0, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} -k & -kR \\ -kR & qER \end{pmatrix}$$

Siccome $\det \text{Hess } U = -kR(qE + kR) < 0 \rightarrow 1$ autovel. pos. e 1 neg. $\rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE.

- Caso $(\xi, \theta) = (0, \pi)$

| pag. 10

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=\pi}} = \begin{pmatrix} -k & kR \\ kR & -qER \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=\pi}} = kR(qE - kR)$$

Abbiamo quindi che

- Se $\frac{qE}{kR} < 1$, allora il determinante è negativo, quindi 1 autovel. è pos. e l'altro è neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. **INSTABILE**.
- Se $\frac{qE}{kR} \geq 1$, osserviamo che il determinante è positivo o nullo, ma
$$\text{Tr Hess } U = -k - qER < 0$$
$$\Rightarrow \text{almeno 1 dei 2 autovalori è negativo}$$
$$\Rightarrow \text{p.to di equilibrio INSTABILE.}$$

$$\therefore \text{Caso } (\xi, \vartheta) = (\mp R \sin \beta, \pm \beta) \quad \boxed{\text{pag. 11}}$$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi = \mp R \sin \beta \\ \vartheta = \pm \beta}} = \begin{pmatrix} -k & -kR \cos \beta \\ -kR \cos \beta & qE R \cos \beta - kR^2 \sin^2 \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \det \text{Hess } U &= kR \left(-qE \cos \beta + kR^2 \cancel{\cos \beta} - kR \cos \beta \right) \\ &= kR \left[-qE \left(-\frac{qE}{kR} \right) + kR^2 - 2kR \left(\frac{qE}{kR} \right) \right] \\ &= k^2 R^2 \left(\frac{q^2 E^2}{k^2 R^2} + 1 - 2 \frac{q^2 E^2}{k^2 R^2} \right) = \\ &= k^2 R^2 \left(1 - \frac{q^2 E^2}{k^2 R^2} \right) \end{aligned}$$

• ~~Caso~~ Se $\frac{qE}{kR} < 1$, allora $\det \text{Hess } U > 0$,

siccome uno degli ~~autovalori~~ elementi diagonali (cioè $-k$) è sicuramente negativo, allora i 2 autovettori sono negativi

$\Rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE.

• Se $\frac{qE}{kR} = 1$, allora $\det \text{Hess } U = 0$, non

per la stessa ragione di cui sopra | pag. 12
(cioè, c'è un elemento diagonale
che è negativo), ~~allora~~ esiste un autovalore
negativo $\rightarrow$ p.t. di equilibrio INSTABILI.

Osservazioni conclusive. Tutti i p.t. di
equilibrio sono instabili. Ciò potrebbe
sembrare controintuitivo, invece è piuttosto
naturale. Infatti, quando $\Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$,
la forza centrifuga $m\Omega^2 \vec{OP} = 2k \vec{OP}$,
prevale su quella della molla $-k \vec{QP} \approx -k \vec{OP}$,
quando P è molto distante dall'anello.
Siccome la forza centrifuga prevale, allora
linea unif. $U(\xi, \vartheta) = -\infty$,
 $|\xi| \rightarrow +\infty, \vartheta \in \Pi$

questo spiega perché è possibile avere che tutti
i p.t. stazionari siano di massimo o di sella
(e quindi instabili). Soltanto, negli

esercizi di altri temi d'esame, pag. 13

La forza centrifuga era assente o, comunque, inferiore a quella dovuta alla molla, quindi il potenziale andava a $+\infty$ quando ci si allontanava indefinitamente dall'origine; ecco perché, in quei casi, si aveva almeno 1 p.to di minimo del potenziale e, quindi, un p.to di equil. stabile.

(3) Sia ora Ω costante, ma non fissato al valore $\sqrt{\frac{2k}{m}}$. Si trascurino gli effetti del campo elettrico (cioè, si ponga $E=0$).

(3A) Si scrivano l'Hamiltoniana e le eq. di Hamilton che descrivono la dinamica nel piano Π .

(3B) Si determinino i valori di Ω per cui possano esistere soluzioni tali che la quantità di moto di P evolve con una legge lineare nel tempo e si descrivano tali soluzioni.

Ripartiamo dalla Lagrangiana

pag. 14

$$\begin{aligned} L(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) &= L(\xi, \theta, \varphi, \dot{\xi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi} = -\Omega) = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \Omega^2 \xi^2 - \frac{1}{2} k \xi^2 \\ &\quad + \cancel{g E R \cos \theta} + k R \xi \sin \theta, \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ E=0 \end{matrix}$

dove è stata omessa l'inessenziale costante additiva
o $\frac{1}{2} M R^2 \Omega^2$.

Introduciamo i momenti canonici coniugati:

$$P_{\xi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m \dot{\xi}, \quad P_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M R^2 \dot{\theta}$$

La Hamiltoniana richiesta sarà dunque

$$\begin{aligned} H(P_{\xi}, P_{\theta}, \xi, \theta) &= \cancel{\text{un}} P_{\xi} \dot{\xi} + P_{\theta} \dot{\theta} - L(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) \Big|_{\substack{\dot{\xi} = P_{\xi}/m \\ \dot{\theta} = P_{\theta}/(M R^2)}} = \\ &= \frac{P_{\xi}^2}{2m} + \frac{P_{\theta}^2}{2M R^2} + \frac{1}{2} (k - m \Omega^2) \xi^2 - k R \xi \sin \theta \end{aligned}$$

Calcoliamo le equazioni di
Hamilton:

pag. 15

$$\begin{cases} \dot{P}_{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = -(k - m\Omega^2)\xi + kR \sin \theta \\ \dot{P}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = kR\xi \cos \theta \\ \dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial P_{\xi}} = \frac{P_{\xi}}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta}} = \frac{P_{\theta}}{mR^2} \end{cases}$$

Vogliamo cercare delle soluzioni t.c.

$$\dot{P}_{\xi} = \text{costante} \rightarrow P_{\xi}(t) = \text{costante} \cdot t + P_{\xi}(0).$$

Per semplicità di notazione con la meccanica unidimensionale, ~~che~~ denotiamo $\ddot{\xi} = v$ e $\ddot{\xi} = a$, allora siccome $\dot{\xi} = P_{\xi}/m \rightarrow P_{\xi} = m\dot{\xi}$, quindi abbiamo che $\dot{P}_{\xi} = m\ddot{\xi} = \text{costante} = m\ddot{\xi} = ma$, allora l'accelerazione è costante, stiamo quindi cercando delle soluzioni per cui $P_{\xi}(t) = ma \cdot t + m\dot{\xi}(0)$

Siccome $\ddot{\xi} = P_{\xi}/m$

pag. 16

$\Rightarrow \dot{\xi} = a \cdot t + v(0)$

$\Rightarrow \xi(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v(0) \cdot t + \xi(0)$,

Cioè abbiamo un moto uniformemente accelerato per quanto riguarda l'allontanamento di Polli' o' pine. Introduciamo le informazioni che abbiamo ricavato finora nella prima eq. di Hamilton, se ne trova che

$$m \cdot a = - \left(k - m \Omega^2 \right) \left[\frac{1}{2} a t^2 + v(0) \cdot t + \xi(0) \right] + k R \sin(\vartheta(t))$$

Siccome nel membro di destra il termine prevalente per $t \rightarrow \infty$ è sicuramente $- \left(k - m \Omega^2 \right) \frac{1}{2} a t^2$, l'unica ~~speranza~~ possibilità perché l'eq. del moto sia soddisfatta $\forall t$ è che

$$\boxed{k - m \Omega^2 = 0}$$

Questa ultima relazione ci fornisce i valori della velocità angolare compatibile con i moti unif. accele.

2ati, ovvero

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

pag. 17

In tal caso, la prima eq. di Hamilton diventa

$$\dot{p}_\xi = ma = kR \sin \theta$$

Affinché a sia costante, allora deve essere

$$\sin \theta = \frac{ma}{kR}$$

cioè $\theta(t)$ deve essere una soluzione di quiete per il moto angolare.

Dall'ultima eq. di Hamilton, segue quindi che

$$p_\theta = MR^2 \dot{\theta} = 0$$

e, dalla seconda, si deduce che

$$0 = \dot{p}_\theta = kR \xi \cos \theta \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ poiché } \xi(t) \neq 0 \text{ per quasi tutti } t, \text{ siccome } \xi = a_0$$

Possiamo ~~per~~ finalmente calcolare l'accelerazione.

Infatti, siccome $\sin \theta = \frac{ma}{kR} \Rightarrow a = \frac{kR}{m} \sin \theta$

$$\Rightarrow \boxed{a = \pm \frac{kR}{m}}$$

Riassumendo, le soluzioni delle
eq. di Hamilton per cui il moto di
P è uniformemente accelerato sono le seguenti
leggi del moto:

$$t \mapsto (P_{\xi}(t), P_{\theta}(t), \xi(t), \theta(t)) = \\ = \left(\pm \frac{kR}{2m} t + m v_0, 0, \pm \frac{kR \cdot t^2}{2m} + v_0 t + \xi_0, \pm \frac{\pi}{2} \right),$$

dove le costanti di integrazione ξ_0 e v_0 sono
fissate dalle condizioni iniziali, in modo t.c.

$$\begin{cases} \xi(0) = \xi_0 \\ P_{\xi}(0) = m v_0 \end{cases}$$