

Esame di Giugno 2017

pagina 1

F111

massa $P = m$

coordinate $P: (p, 0, -\frac{1}{9})$

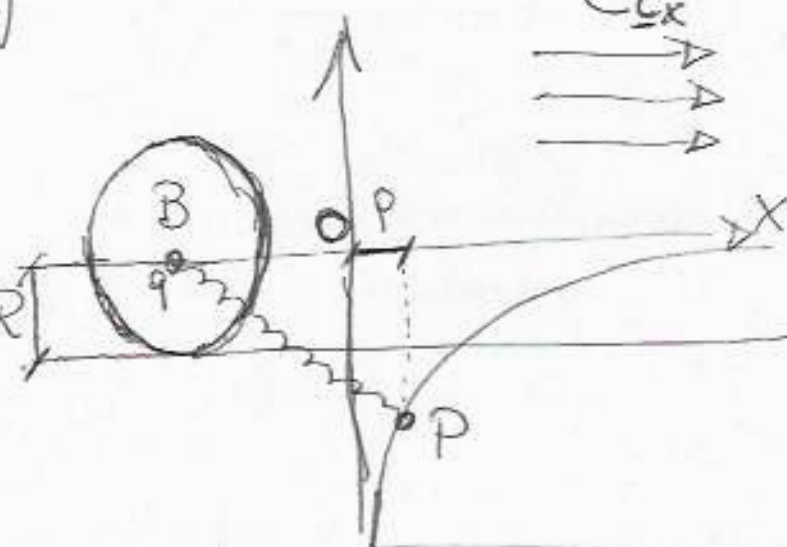
raggio del disco: R

massa " " : M

Il disco rotola senza strisciare,

carica in $B: q$

Campo elettrico: $E \underline{e}_x$
Con E costante



(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

Assumiamo, come coordinate di Lagrange,
 p, x , dove p è l'ascissa di P e
 x è quella del baricentro.

$\underline{V}_P = (\dot{p}, 0, \frac{\dot{p}}{9})$. Ne segue che l'energia cinetica del punto P è

$$\frac{1}{2} m \underline{V}_P \cdot \underline{V}_P = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{1}{9}\right) \dot{p}^2$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica del disco, dal teorema di König otteniamo che

$$T_{\text{Disco}} = \frac{1}{2} M \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

pag. 2

dove ω è la velocità angolare di rotazione ^{del disco} attorno al suo baricentro e

$$I = M \int_0^R 2\pi z^3 dz = \frac{M 2\pi R^4}{4\pi R^2} = \frac{MR^2}{2}.$$

Come ben noto (dalle lezioni e da altri temi d'esame), la condizione che il ~~disco~~ disco rotola senza strisciare implica che

$$\underline{v}_B \cdot \underline{e}_x + R\omega = 0 \Rightarrow \dot{x} = -R\omega;$$

ne segue che

$$T_{\text{Disco}} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4} M \dot{x}^2.$$

Possiamo quindi scrivere l'energia cinetica totale che è

$$T = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{1}{2} \right) \dot{p}^2 + \frac{3}{4} M \dot{x}^2.$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, abbiamo che

$$U = mgz_p + \frac{1}{2} k \overline{BP}^2 - q \mathcal{E} x_B.$$

Andando a sostituire le ^{espressioni delle} coordinate dei punti, scritte in funzione di x e ρ , otteniamo che

$$U = -mg \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} k \left[(\rho - x)^2 + \frac{1}{\rho^2} \right] - q \mathcal{E} x.$$

Possiamo quindi scrivere la lagrangiana:

$$L(\rho, x, \dot{\rho}, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{1}{\rho^4} \right) \dot{\rho}^2 + \frac{3}{2} M \dot{x}^2$$

$$+ \frac{mg}{\rho} - \frac{1}{2} k \left[(\rho - x)^2 + \frac{1}{\rho^2} \right] + q \mathcal{E} x$$

e le equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = m \left(1 + \frac{1}{\rho^4} \right) \ddot{\rho} - \frac{2m \dot{\rho}^2}{\rho^5} + \frac{mg}{\rho^2} + k(\rho - x) - \frac{k}{\rho^3} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{3}{2} M \ddot{x} + k(x - \rho) - q \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

(2) Si ponga $m = M = k = \mathcal{E} = q = 1$ e si determinino i p.t. di equilibrio del sistema al variare di k e se ne studi

la stabilità, se possibile al variare pag. 4
di k o, almeno, nel caso particolare $k=6$.

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{mg}{\rho^2} + k(\rho - x) - \frac{k}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k(x - \rho) - qE = 0 \Rightarrow k(\rho - x) = -qE,$$

→ quest'ultima relazione, inserita nella
prima eq. del sistema, ci fornisce un'eq.
nella sola ρ , cioè

$$\frac{mg}{\rho^2} - qE - \frac{k}{\rho^3} = 0 \Rightarrow -qE\rho^3 + mg\rho - k = 0$$

Andando a sostituire i valori scritti nel testo
otteniamo: $\rho^3 - 7\rho + k = 0$.

Per comprendere quante soluzioni esistono e dove
sono posizionate, poniamo $f(\rho) := \rho^3 - 7\rho$,
l'equazione allora diventa

$$f(\rho) = -k, \text{ dove ricordiamo che } k > 0.$$

Dal grafico della funzione si deduce immediatamente che abbiamo 3 possibili situazioni.

Quando $k = k_0 > |f(\sqrt{7/3})|$

non abbiamo nessuna soluzione positiva. Si ricordi che siamo interessati solo a soluzioni positive perché $p > 0$. Inoltre $\sqrt{7/3}$ è evidentemente il p.to di minimo della funzione cubica, $p^3 - 7p$, perché

$$f'(p) = 3p^2 - 7 = 0 \Rightarrow p = \pm \sqrt{7/3}.$$

Ovviamente si ha che il minimo assoluto di $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è ~~per~~ il valore

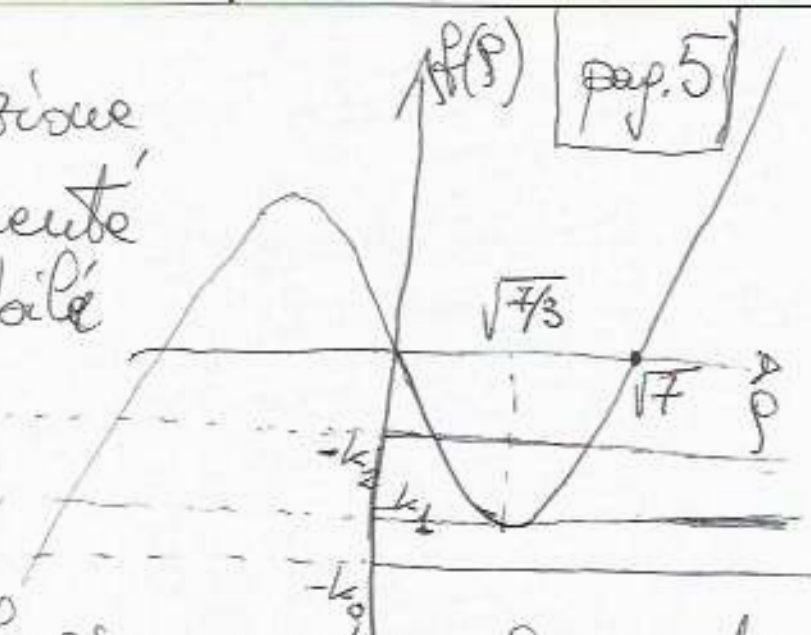
$$f(\sqrt{7/3}) = \left(\frac{7}{3} - 7\right)\sqrt{7/3} = -\frac{14}{3}\sqrt{7/3}, \text{ quindi}$$

per $k > \frac{14}{3}\sqrt{7/3}$ ^{non} abbiamo p.ti di equilibrio.

Per $k = k_1 = \frac{14}{3}\sqrt{7/3} \approx 7.13$ abbiamo 1! sol.

di quiete in $p_1\left(\frac{14}{3}\sqrt{7/3}\right) = p_2\left(\frac{14}{3}\sqrt{7/3}\right) = \sqrt{7/3}$.

Infine, se $k = k_2 \in \left(0, \frac{14}{3}\sqrt{7/3}\right)$ abbiamo 2 sol. di equilibrio che indichiamo con $p_1(k)$ e $p_2(k)$, dove



$$f(p_j(k)) = -k \quad \forall j=1,2 \text{ e, inoltre,}$$

pag. 6

$$p_1(k) \in (0, \sqrt{7/3}) \text{ , mentre } p_2(k) \in (\sqrt{7/3}, \sqrt{7}).$$

Riassumendo, abbiamo che i p.ti di equilibrio sono

$$(p, x) \in \left\{ \left(p_1(k), \frac{1}{k} + p_1(k) \right), \left(p_2(k), \frac{1}{k} + p_2(k) \right) \right\},$$

dove $p_j(k)$ sono le ^{sudette} radici positive dell'equazione $f(p) = -k$ e abbiamo utilizzato la relazione $k(x-p) = 1$.

Ovviamente i p.ti di equilibrio, $\exists$ sse
 $k \leq k_1 = \frac{16}{3} \sqrt{7/3}$.

Nel caso particolare in cui $k = k_1$, allora
 le i due punti di equilibrio sono coincidenti.

Per discutere la stabilità abbiamo calcolato
 l'Hessiano:

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} -\frac{2mg}{p^3} + k + \frac{3k}{p^4} & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

Consideriamo separatamente i vari casi (sostituendo i valori dei parametri così come sono precisati dal testo).

pag. 7

- Caso $(p, x) = (p_1(k), \frac{1}{k} + p_1(k))$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{p=p_1(k) \\ x=\frac{1}{k}+p_1(k)}} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{p_1^3(k)} + k + \frac{3k}{p_1^4(k)} & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \text{Hess } U &= \frac{3k}{p_1^4(k)} \left(k - \frac{16}{3} p_1(k) \right) \\ &= \frac{3k}{p_1^4(k)} \left(\frac{7}{3} p_1(k) - p_1^3(k) \right) = \\ &= \frac{3k}{p_1^3(k)} \left(\frac{7}{3} - p_1^2(k) \right), \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $k - \frac{16}{3} p_1(k) - \frac{7}{3} p_1(k) + p_1^3(k) = 0$.

• Sottocaso con $k \in (0, k_1) \Rightarrow p_1(k) \in (0, \sqrt{7/3})$
Abbiamo quindi che $\det \text{Hess } U > 0$.

Siccome un elemento diagonale (quello in ~~alto~~ basso a destra) è sicuramente positivo, allora la matrice è sicuramente definita positiva.

$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p. to di equil. STABILE

• ~~Sottocaso~~ con $k = k_1 = \frac{14}{3}\sqrt{7/3} \Rightarrow p_1(k) = \sqrt{7/3}$

Ne segue che $\det \text{Hess } U = 0$.

Siccome abbiamo 1 elemento sulla diagonale principale che è positivo, allora 1 autoval. è pos. e 1 è nullo. Occorre un supplemento di indagine.

- Caso $(p, x) = (p_2(k), \frac{1}{k} + p_2(k))$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{p=p_2(k) \\ x=\frac{1}{k}+p_2(k)}} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{p_2^3(k)} + k + \frac{3k}{p_2^4(k)} & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

Procedendo come in precedenza, si ottiene

che $\det \text{Hess } U = \frac{3k}{p_2^3(k)} \left(\frac{7}{3} - p_2^2(k) \right)$ pag. 9

• Sottocaso con $k \in (0, k_1) \Rightarrow p_2(k) \in (\sqrt{7/3}, \sqrt{7})$

Abbiamo quindi che

$\det \text{Hess } U < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. pos.
e 1 neg.

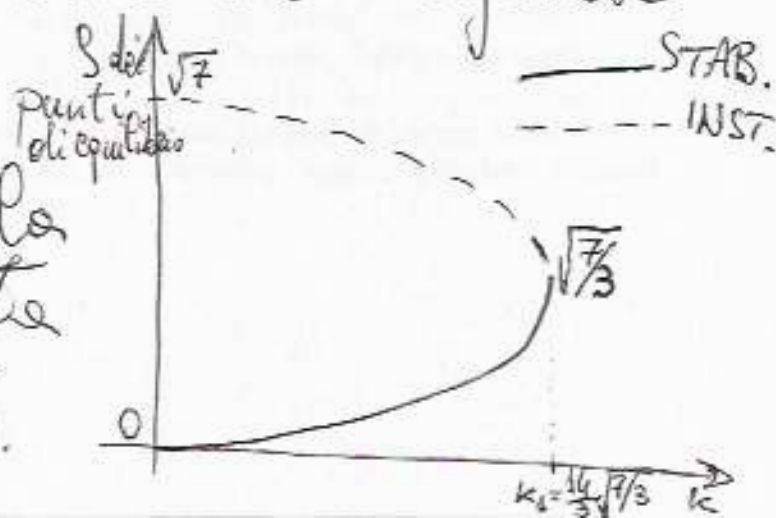
$\Rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE.

• Sottocaso con $k = k_1 \Rightarrow p_2(k) = \sqrt{7/3}$

Questo sottocaso coincide esattamente con quello che abbiamo considerato prima e per cui abbiamo concluso solamente che serve un supplemento di indagine.

Riassumiamo la situazione con il seguente grafico.

Questa situazione è quella tipica della cosiddetta biforcazione tangente.



~~Non~~ Per esigenze di brevit     meglio | Pag. 10
 non trattare il caso critico, con $k=k_1=\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$
 e i due punti di equilibrio coincidenti e di coordinate

$$\left(p_1(k_1), \frac{1}{k_1} + p_1(k_1) \right) = \left(p_2(k_1), \frac{1}{k_1} + p_2(k_1) \right).$$

~~In generale~~ genericamente, il caso critico per la
 biforcazione tangente   un p.to di equilibrio instabi-
 le.   facile spiegarne la ragione a livello intui-
 tivo: il potenziale in una direzione presenta un ~~p.to di~~
 minimo (in corrispondenza al p.to di equilibrio) e
 in un'altra direzione, ortogonale alla precedente, presenta
 un flesso o tangente orizzontale (sempre in correspon-
 denza al p.to di equilibrio). In corrispondenza a
 questa seconda direzione, ci si pu  allontanare
 dal p.to di equilibrio, che quindi   instabile.

In verit  , per rendere rigoroso questo ragionamento,
 si dovrebbe disaccoppiare il moto nelle 2 direzioni e nel
 caso di questo problema, ci  non   affatto semplice.
 Per completezza, tratteremo brevemente il
 caso particolare con $k=6$. L'equazione che
 determina la posizione dei punti di equilibrio
 diventa $p^3 - 7p + 6 = 0$ si osserva immediatamente

che $p=1$ è una soluzione dell'equazione / pag. 11
Possiamo allora scomporre il polinomio
 $f(p)+6$ come segue:

$$p^3 - 7p + 6 = (p-1)(p^2 + p - 6) = 0$$

→ le tre soluzioni sono

$$p_1 = 1, \quad p_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Di conseguenza, le soluzioni accettabili sono

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad \text{mentre } p_3 = -3 \text{ è da rigettare, perché è negativa.}$$

Abbiamo quindi il p.to di equilibrio

$$A: (p, x) = \left(1, \frac{7}{6}\right) \quad B: \left(2, \frac{13}{6}\right)$$

- Caso A

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{p=1 \\ x=7/6}} = \begin{pmatrix} -16 + 6 + 18 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det \text{Hess } U = 24 > 0, \quad \text{Tr Hess } U = 16 > 0$$

→ 2 autoval. pos. → p.to di equilibrio
STABILE

- Caso B

pag. 12

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{p=2 \\ x=\frac{13}{6}}} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} + 6 + \frac{9}{8} & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

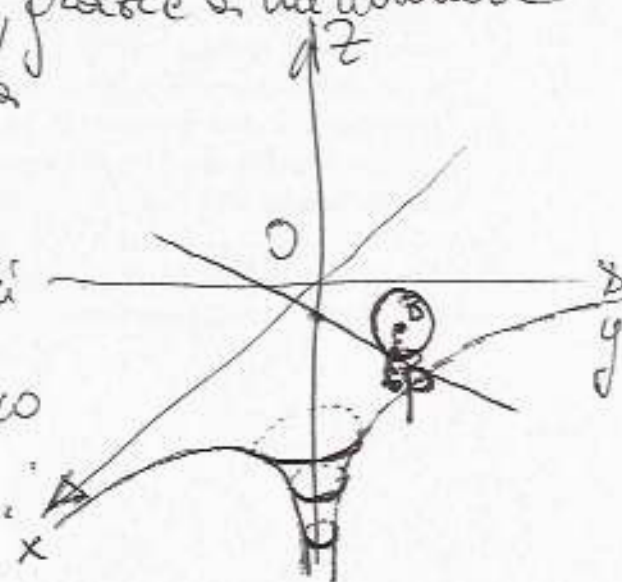
$$\det \text{Hess } U = -\frac{5}{8} \cdot 6 = -\frac{15}{4} < 0$$

$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE

Ovviamente, i risultati che abbiamo ottenuto per il caso particolare con $k=6$ sono in accordo con la trattazione generale.

(3) Ora il punto P è libero di muoversi sulla superficie $z = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nel sist. di rif. $Oxyz$.

La guida è posta in modo t.c., grazie a un ulteriore vincolo, le coordinate di B sono ora sempre $(x, y, 0)$ (quando quelle di P sono $(x, y, -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$). Si consideri trascurabile sia la massa del disco che il campo elettrico, cioè si ponga $\Pi=0$, e $E=0$.



(3A) Hamiltoniano e costanti del moto.

pag. 13

(3B) Si scrive ~~la~~ l'Hamiltoniano che descrive il solo moto radiale, riducendo ^{il problema} a un solo grado di libertà.

(3C) Si determini $\hat{r}$ tale che i moti siano circolari e orizzontali.

(3D) Si sviluppi l'Hamiltoniano in approssimazione quadraticca rispetto a $\hat{r} - \hat{r}$ e $\hat{p}_r$ in modo da poter determinare T_r periodo delle piccole oscillazioni radiali.

Infine, si determini

$$\lim_{\hat{r} \rightarrow \infty} \frac{T_r}{T_0}$$

dove T_0 è il periodo delle orbite circolari di raggio $\hat{r}$.

(3A) Cominciamo a scrivere la Lagrangiana del sistema. Siccome $\Omega = 0$, il disco non contribuisce all'energia cinetica.

Adottiamo ρ e θ come coordinate pag. 14
 libere o lagrangiane. Di conseguenza,
 Coord. $P = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, -\frac{1}{\rho})$ e
 Coord. $B = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$.

$$\Rightarrow \underline{V}_P = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \underline{e}_z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \underline{V}_P \cdot \underline{V}_P = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 \left(1 + \frac{1}{\rho^4}\right) + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2$$

Possiamo quindi scrivere la nuova lagrangiana:

$$L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(1 + \frac{1}{\rho^4}\right) \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mg}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{k}{\rho^2}$$

$$\Rightarrow P_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \left(1 + \frac{1}{\rho^4}\right) \dot{\rho} \quad P_\theta = m \rho^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow H(P_\rho, P_\theta, \rho, \theta) = \left[\dot{\rho} P_\rho + \dot{\theta} P_\theta - L(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}) \right] \bigg|_{\substack{\dot{\rho} = \frac{P_\rho}{m(1+1/\rho^4)} \\ \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{m\rho^2}}} =$$

$$= \frac{P_\rho^2}{2m(1+1/\rho^4)} + \frac{P_\theta^2}{2m\rho^2} - \frac{mg}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{k}{\rho^2}$$

Siccome θ è una q variabile
ciclica per H , allora

pag. 15

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow P_\theta = m \dot{\theta}^2 \text{ è una costante del moto.}$$

$P_\theta = m \dot{\theta}^2$ è evidentemente ~~anche~~ la componente
verticale del momento angolare.

Inoltre, siccome $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, allora anche

$$H = \frac{P_\theta^2}{2m(1+\frac{1}{\rho^2})} + \frac{P_\theta}{2m\rho^2} - \frac{mg}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{k}{\rho^2} = E$$

è una costante del moto, cioè l'energia
totale del sistema (meccanico e angoli
fissi).

(3B) Poniamo $P_\theta = J$ (costante, per quanto detto
sopra), allora le eq. del moto radiale sono
Hamiltoniane, cioè del tipo

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial P_\rho}, \quad \dot{P}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho},$$

dove $H(P_\rho, \rho) = \frac{P_\rho^2}{2m(1+\frac{1}{\rho^2})} + U(\rho)$, dove il potenziale

(3C) Dalle equazioni di Hamilton, pag. 16

segue che

$$\begin{cases} \dot{P}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{P_\varphi^2}{m\left(1+\frac{1}{\varphi^4}\right)^2} \frac{2}{\varphi^5} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \frac{P_\varphi}{m\left(1+\frac{1}{\varphi^4}\right)^2} \end{cases}$$

Le soluzioni di equilibrio, dalla seconda equazione, non possono che essere del tipo

$$P_\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \varphi = \hat{\varphi},$$

dove (dalla prima equazione) deve essere

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\hat{\varphi}) = 0$$

Le soluzioni circolari e orizzontali (per cui $\varphi(t) = \hat{\varphi}$ e $z(t) = -\frac{1}{\hat{\varphi}}$) sono quindi punti stazionari per il potenziale efficace, quindi si ha che

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\hat{\varphi}) = \frac{mg}{\hat{\varphi}^2} - \left(\frac{J^2}{m} + k\right) \frac{1}{\hat{\varphi}^3} = 0$$

$$\Rightarrow mg \hat{\varphi} = \frac{J^2 + mk}{m} \Rightarrow \hat{\varphi} = \frac{J^2 + mk}{m^2 g}$$

(3D) Se sviluppiamo in approssi [pag. 17] una funzione quadratica H vicino al punto di equilibrio, otteniamo:

$$H \simeq \frac{P^2}{2m(1+\frac{1}{\hat{\rho}^4})} + \frac{1}{2} U''(\hat{\rho})(\rho - \hat{\rho})^2 + U(\hat{\rho})$$

Siccome $U(\hat{\rho})$ e $U''(\hat{\rho})$ sono costanti, questa approssimazione ha la stessa struttura della Hamiltoniana di un oscillatore armonico, cioè $\frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2} k x^2$, il cui periodo corrispondente è $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$

Per analogia, $T_\rho = 2\pi \sqrt{\frac{m(1+\frac{1}{\hat{\rho}^4})}{U''(\hat{\rho})}}$

Invece, dalla conservazione del momento abbiamo

$$\cancel{E} \quad J = m \hat{\rho}^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{J}{m \hat{\rho}^2}$$

$$\Rightarrow T_\theta = 2\pi \frac{m \hat{\rho}^2}{J}$$

È conveniente calcolare esplicitamente $\frac{\partial U(\hat{\rho})}{\partial \hat{\rho}} = 0$

$$U''(\hat{\rho}) = -\frac{2mg}{\hat{\rho}^3} + \left(\frac{J^2}{m} + k\right) \frac{3}{\hat{\rho}^4} = -\frac{2}{\hat{\rho}} \left[\frac{mg}{\hat{\rho}^2} + \left(\frac{J^2}{m} + k\right) \frac{1}{\hat{\rho}^3} \right] + \left(\frac{J^2}{m} + k\right) \frac{1}{\hat{\rho}^4}$$

$$\Rightarrow T_p = 2\pi \sqrt{\frac{m(1 + \frac{1}{\hat{p}^4}) \cdot \hat{p}^4}{\frac{J^2}{m} + mk}} \quad \boxed{\text{pag. 10P}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\hat{p} \rightarrow +\infty} \frac{T_p}{T_g} = \lim_{\hat{p} \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\hat{p}^4}}{J^2 + mk}} \cdot m \hat{p}^{\frac{1}{2}}}{\frac{m \hat{p}^{\frac{1}{2}}}{J}}$$

$$= \lim_{\hat{p} \rightarrow +\infty} \frac{J}{\sqrt{J^2 + mk}} = \lim_{\hat{p} \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{mk}{J^2}}} = 1,$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che se $\hat{p} \rightarrow +\infty$, allora anche $J^2 \rightarrow +\infty$, poiché

$$\hat{p} = \frac{1 + mk/J^2}{m^2 g} J^2$$

e m, k e g sono parametri, quindi le orbite circolari sono d'raggio sempre maggiore se il momento angolare $\rightarrow$ infinito.