

Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
21 Giugno 2017

Un punto materiale pesante P , di massa m , si muove rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con z verticale ascendente. Il punto P è inoltre vincolato a scorrere sulla superficie *simmetrica per rotazione attorno all'asse z* , che è caratterizzata dall'equazione

$$z = -1/\rho,$$

dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Una guida rettilinea di massa trascurabile e lunghezza infinita ruota nel piano orizzontale $z = -R$ attorno al punto di coordinate $(0, 0, -R)$, in modo tale che la proiezione $P_\star$ del punto P sul suddetto piano $z = -R$ cade all'interno della guida stessa^[⊙]. Un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare al di sopra della suddetta guida. Una molla ideale, di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k , collega P al centro B del disco. In corrispondenza a B è posta anche una carica elettrica q , che è soggetta agli effetti indotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse x .

È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero m , g , M , R , k , q e $\mathcal{E}$, abbiano valori reali positivi, fino a quando non verrà specificato diversamente. Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo che il punto P possa attraversare la guida e il disco senza scontrarsi con essi. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) *Limitatamente al caso* in cui si considera un ulteriore vincolo, tale che il punto P deve appartenere al semipiano Oxz con ascisse x positive, si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si studi ulteriormente il sistema meccanico in presenza dell'ulteriore vincolo descritto al precedente punto (1), *limitatamente al sotto-caso* in cui alcuni valori dei parametri sono fissati in modo tale che $m = M = R = q = \mathcal{E} = 1$ e $g = 7$.
 - (2A) Si determinino tutti i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro k .
 - (2B) Si studi la stabilità dei punti di equilibrio quando $k = 6$.
 - (2C) Facoltativamente, se proprio non si ha altro da fare, si studi la stabilità dei punti di equilibrio al variare del parametro k .
- (3) Si riconsideri il sistema meccanico così come è stato descritto all'inizio del testo fino al punto (1), cioè escludendo il vincolo aggiuntivo e senza assumere che i valori parametri siano fissati come al punto (2).

Si introduca ora un nuovo vincolo, in modo tale che la molla sia sempre disposta in verticale (in altri termini, la proiezione $P_\star$ appartiene sempre alla retta passante per

^[⊙] In altre parole, se (ρ, ϑ, z) sono le coordinate cilindriche del punto P , allora ϑ è anche l'angolo formato dal piano verticale Oxz con la guida.

i punti P e B). Inoltre, si assuma che la massa del disco e il campo elettrico abbiano effetti trascurabili (cioè si ponga $M = \mathcal{E} = 0$).

- (3A) Si scriva la Hamiltoniana del sistema e si determinino le costanti del moto.
- (3B) Si riduca il sistema a un grado di libertà, in modo da scrivere una nuova Hamiltoniana associata al solo moto *radiale* di P (o, equivalentemente di B); deve quindi essere separato quel grado di libertà corrispondente a una delle costanti di cui al punto (3A).
- (3C) Utilizzando i metodi dell'analisi qualitativa, si determinino i valori $\hat{\rho}$ della distanza dall'asse z per cui le orbite del sistema sono circolari e orizzontali; ovviamente, l'espressione di $\hat{\rho}$ deve essere scritta in funzione degli altri parametri e delle costanti di cui al punto (3A).
- (3D) Si sviluppi la Hamiltoniana di cui al punto (3B) in approssimazione quadratica rispetto a $\rho - \hat{\rho}$ e a p_ρ , che è il momento coniugato alla coordinata radiale ρ . Conseguentemente, si determini il periodo T_ρ delle piccole oscillazioni attorno al valore $\hat{\rho}$, corrispondente a una soluzione di quiete per il moto radiale. Infine, si determini

$$\lim_{\hat{\rho} \rightarrow \infty} \frac{T_\rho}{T_\vartheta} ,$$

dove T_ϑ è il periodo di rotazione associato all'orbita circolare di raggio $\hat{\rho}$.