

Prova scritta di Fisica Matematica 1
per il corso di laurea in Matematica
29 Gennaio 2018

Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P , Q e da un'asta, i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale ascendente. I punti materiali P e Q sono entrambi di massa m . L'asta è perfettamente rigida e di densità di massa omogenea al suo interno, è di massa M e lunghezza l ; essa è vincolata in modo che il suo baricentro sia costantemente sovrapposto all'origine O ed è libera di ruotare nel piano orizzontale Oxy . Sull'asta è poggiata una guida rettilinea, che è da considerare di lunghezza infinita e massa trascurabile. I punti P e Q possono scorrere su tale guida. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega Q a P_* , il quale si muove sul paraboloide di coordinate $z = x^2 + y^2 + l$ in modo tale da mantenere gli stessi valori delle coordinate x e y del punto P (in altri termini, P è la proiezione di P_* sul piano orizzontale Oxy). Anche la massa di P_* è da considerarsi trascurabile.

Si supponga inoltre che i vincoli siano ideali e tali che i punti P e Q possano attraversarsi l'un l'altro senza scontrarsi. Si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si consideri il sistema meccanico quando è soggetto anche all'ulteriore vincolo descritto dall'equazione $\dot{\vartheta} = \Omega$, laddove Ω è *costante* e ϑ è l'angolo che ha vertice nell'origine O ed è formato dalle semirette con valori positivi delle ascisse x e ξ , dove ξ è la coordinata che indica la posizione di un punto sulla guida rettilinea (ovviamente, si intenda che $\xi = 0$ in corrispondenza all'origine O).

Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio, tali per cui *il sistema è in quiete rispetto al riferimento cartesiano non-inerziale $O\xi z$* , limitatamente al sotto-caso in cui la velocità angolare di rotazione dell'asta è fissata in modo tale che $\Omega = \sqrt{k/(2m)}$. Inoltre, si studi la stabilità delle suddette soluzioni di equilibrio, al variare del parametro l .

- (3) Si consideri ora un sistema meccanico simile a quello descritto inizialmente nel testo, a cui vengono apportate le seguenti variazioni. In primo luogo, *non si assuma* che la velocità angolare $\dot{\vartheta}$ sia costantemente fissata così come descritto al punto (2); inoltre, si supponga che sia introdotto un nuovo vincolo in modo tale che P e Q siano sempre sovrapposti l'uno all'altro (ma comunque liberi di muoversi lungo la guida).

- (3A) Si scrivano, per il nuovo sistema meccanico, la lagrangiana e la hamiltoniana; si determinino le costanti del moto.
- (3B) Dopo aver riformulato opportunamente il problema con il *metodo del potenziale efficace*, si esprima *una condizione cui deve essere soggetto il valore del momento angolare* (o, equivalentemente, della velocità angolare iniziale $\dot{\vartheta}(0)$ dell'asta), affinché *i punti P e Q passino per l'origine durante il moto che evolve da qualsiasi condizione iniziale del tipo seguente: al tempo $t = 0$ sia $\xi(0)$ l'ascissa dei punti P e Q , mentre sia nulla la velocità relativa iniziale di quegli stessi punti rispetto alla guida rettilinea* (cioè, sia $\dot{\xi}(0) = 0$).
- (3C) Sia $\mathcal{T}$ il valore del primo istante di tempo positivo nel quale il moto che fa seguito alle condizioni iniziali descritte al punto (3B) passa dall'origine. Si determini il valore $\dot{\vartheta}(0)$ della velocità angolare iniziale dell'asta, tale che sia soddisfatta la relazione $\dot{\vartheta}(\mathcal{T}) = 2\dot{\vartheta}(0)$.
- (3D) Si determini, tramite il calcolo di un opportuno integrale, la relazione che deve essere soddisfatta affinché sia *periodico* il moto complessivo dei punti P e Q nel piano orizzontale Oxy .