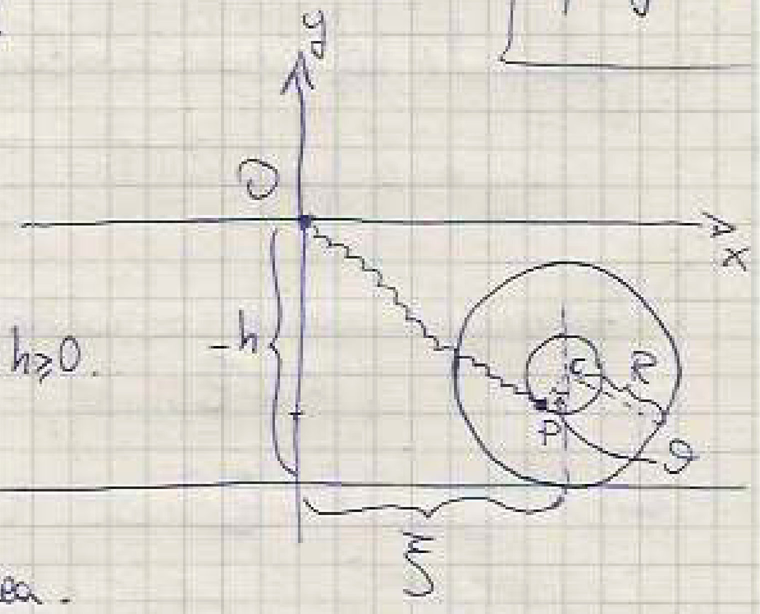
II esonero FM1
Giugno 2016



Guida rettilinea orizzontale in corrispondenza a $y=-h$ con $h\geq 0$.
Disco omogeneo di massa M e raggio R, rotola senza strisciare sulla suddetta guida rettilinea.
Centro del disco: C.
$\overline{PC}=\ell$, massa $P=m$, costante molla tra O e $P=k$.

---

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

Adottiamo coordinate libere o lagrangiane, ξ, ϑ come descritte in figura.

Per quanto riguarda il calcolo dell'energia cinetica, possiamo scrivere:

$$T=\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}I_D\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\,\underline{v}_P\cdot\underline{v}_P$$

dove I_D è l'inerzia del disco rispetto al cui asse di rotazione che passa per il baricentro C del disco ed è normale al piano Oxy, φ è l'angolo di rotazione del disco e abbiamo ~~usato~~ il fatto che la velocità angolare di rotazione del disco è tale che $R\dot{\varphi}=-\dot{\xi} \Longrightarrow \dot{\varphi}=-\dot{\xi}/R$.

Per quanto riguarda il calcolo dell'inerzia del disco si procede ~~nel~~ modo abituale:

$$I_D = \delta \int_0^R d\rho \, 2\pi \rho^3 = \frac{\pi}{2} \delta R^4 = \frac{\cancel{\pi}}{2} \frac{M}{\cancel{\pi} R^2} R^{\cancel{4}\,2} = \frac{MR^2}{2}$$

Determiniamo le coordinate del p.to P; esse saranno:

$$(\xi + l \sin\theta, \; -h + R - l\cos\theta).$$

$$\Rightarrow \underline{v}_P = (\dot{\xi} + l\dot{\theta}\cos\theta, \; l\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = \dot{\xi}^2 + 2l\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2$$

Sommando i vari contributi otteniamo

$$T = \frac{1}{2} M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{4} M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + ml\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m}{2} l^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{\xi}^2 + ml\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2$$

Passiamo a considerare l'energia potenziale.

$$U = Mg\,y_c + mg\,y_P + \frac{1}{2} k\,\overline{OP}^2$$

$$= Mg(-h+R) + mg(-h+R-l\cos\theta) +$$

$$+ \frac{1}{2} k\left[\xi^2 + 2l\xi\sin\theta + l^2\sin^2\theta + h^2 - 2hR + R^2 + l^2\cos^2\theta \mp 2l(R-h)\cos\theta\right] =$$

$$= -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k\xi^2 + kl\xi\sin\theta \mp kl(R-h)\cos\theta + \ldots$$

dove non sono state trascritte le costanti additive, perché non ~~xxxxxx~~ inducono effetti sulla dinamica. D'ora in avanti, esse saranno sistematicamente omesse.

Possiamo quindi scrivere la lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M+m\right)\dot{\xi}^2 + ml\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$
$$+ mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k\xi^2 - kl\xi\sin\theta + kl(R-h)\cos\theta,$$

e le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = \left(\dfrac{3}{2}M+m\right)\ddot{\xi} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \qquad\qquad + k\xi + kl\sin\theta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = ml\ddot{\xi}\cos\theta - \cancel{ml\dot{\xi}\dot{\theta}\sin\theta} + ml^2\ddot{\theta} \\ \qquad\qquad + \cancel{ml\dot{\xi}\dot{\theta}\sin\theta} + mgl\sin\theta \\ \qquad\qquad + kl\xi\cos\theta + kl(R-h)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

---

(2) Per semplicità, si ponga $l = g = k = m = 1$, $R = 2$.
Al variare del parametro $h \geq 0$ si determinino i p.ti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

L'energia potenziale con i particolari valori dei parametri fissati dal testo del p.to 2, diventa

$$U = -\cos\theta + \frac{1}{2}\xi^2 + \xi\sin\theta - (2-h)\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}\xi^2 + \xi\sin\theta + (h-3)\cos\theta$$

Per ~~risolvere~~ determinare i p.ti di equilibrio risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = \xi + \sin\vartheta = 0 & \Rightarrow \xi = -\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = \xi\cos\vartheta - (h-3)\sin\vartheta = 0 & \Rightarrow \sin\vartheta(\cos\vartheta + h - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\sin\vartheta \cdot (\cos\vartheta + h - 3) = 0$$

$$\sin\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \pi$$

$$\cos\vartheta = 3 - h \Rightarrow \vartheta = \pm\beta$$ dove $\beta := \arccos(3-h)$ che è definito quando $h \in [2,4]$

I p.ti di equilibrio sono quindi

$$(\xi, \vartheta) = \left\{ (0,0), (0,\pi), (\mp\sin\beta, \pm\beta) \right\}$$

dove la seconda coppia di p.ti di equilibrio $\exists$ sse $h \in [2,4]$

Al fine di studiare ~~il~~ ~~pto~~ la stabilità è conveniente calcolare

$$\text{Hess}\, U = \begin{pmatrix} 1 & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & -\xi\sin\vartheta - (h-3)\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Consideriamo le varie situazioni particolari.

- Caso $(0,0)$

$$\left.\text{Hess}\,U\right|_{\substack{\xi=0\\ \theta=0}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -(h-3) \end{pmatrix}$$

$$\left.\det \text{Hess}\right|_{\substack{\xi=0\\ \theta=0}} = 3-h-1 = 2-h$$

Se $0 \leq h < 2$, allora $\det > 0$ e $Tr = 4-h > 0$
$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.to di equil. STABILE.

Se $h=2$, allora $\det = 0$ e $Tr = 2 > 0$
$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ è necessario un supplemento di indagine.

Se $h > 2$, allora $\det < 0$
$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE.

- Caso $(0,\pi)$

$$\left.\text{Hess}\,U\right|_{\substack{\xi=0\\ \theta=\pi}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & h-3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\det \text{Hess}\,U\right|_{\substack{\xi=0\\ \theta=\pi}} = h-3-1 = h-4.$$

Se $0 < h < 4$, allora $\det < 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. INST.

Se $h = 4$, allora $\det = 0$ e $Tr = 2$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ un supplemento di indagine è necessario

Se $h > 4$, allora $\det > 0$ e $Tr = h - 2 > 0$

$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.to di equil. STABILE.

• Casi $(\mp \sin\beta, \pm\beta)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi = \mp\sin\beta \\ \vartheta = \pm\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\beta \\ \cos\beta & \sin^2\beta - (h-3)\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi = \mp\sin\beta \\ \vartheta = \pm\beta}} = 1 - 2\cos^2\beta - (h-3)\cos\beta =$$
$$= 1 - 2(3-h)^2 + (h-3)^2 = 1 - (h-3)^2$$

$$\det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi = \mp\sin\beta \\ \vartheta = \pm\beta}} > 0 \quad \text{per } (h-3)^2 < 1 \Leftrightarrow h \in (2,4).$$

Se $h \in (2,4)$, allora $\det > 0$, un elemento diagonale (cioè 1) è maggiore di 0, $\Rightarrow$ 2 autoval. pos.

$\Rightarrow$ p.ti di equil. STABILI

Se $h = 2, 4$, allora $\det = 0$, un el. diag. è maggiore di 0

$\Longrightarrow$ è necessario un suppl. di indagine

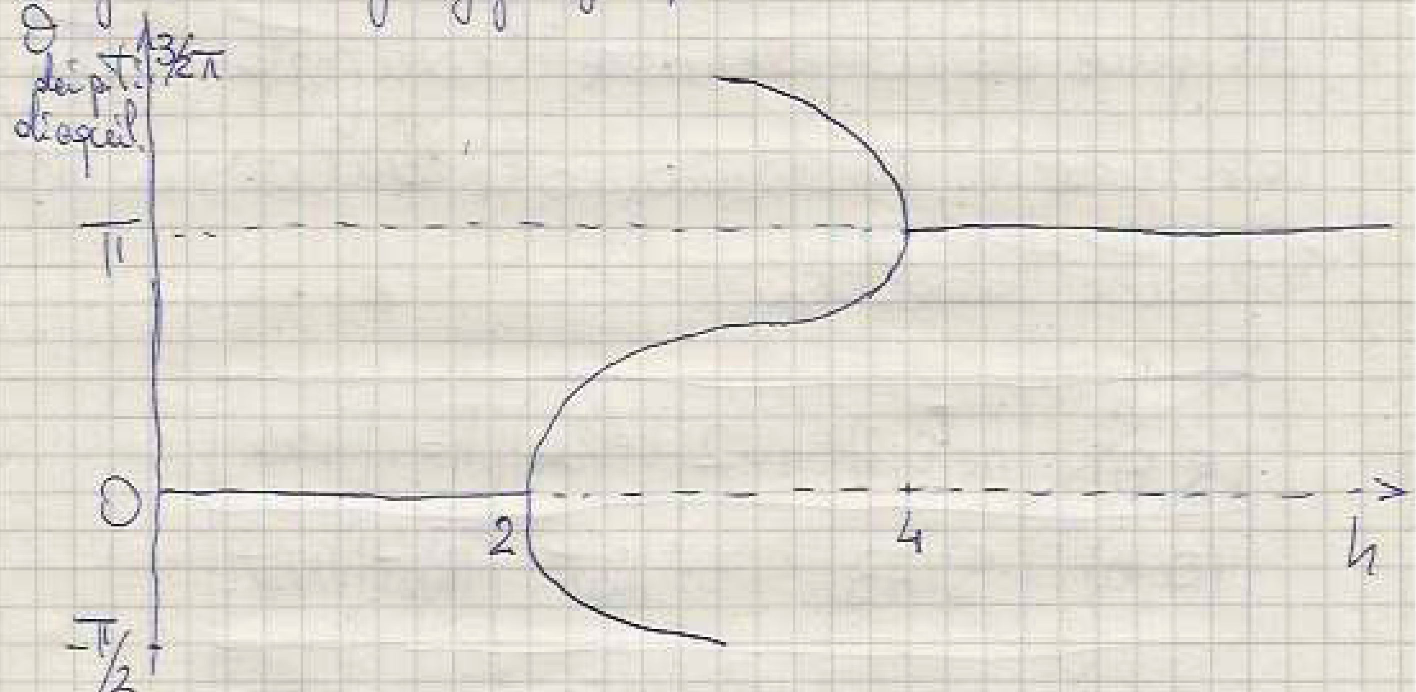
Se $h \notin [2,4]$, allora i p.ti di equil. $(\mp \sin\beta, \pm\beta)$ $\nexists$.

Al fine di comprendere il comportamento nei casi indecisi, riassumiamo le conclusioni nella seguente tabella

(ξ,θ) \ h	$h\in[0,2)$	$h=2$	$h\in(2,4)$	$h=4$	$h>4$
$(0,0)$	STAB.		INST.	INST.	INST.
$(0,\pi)$	INST.	INST.	INST.		STAB.
$(\mp\sin\beta,\pm\beta)$	$\nexists$		STAB.		$\nexists$

I 4 rettangoli vuoti corrispondono ai casi indecisi.
In realtà, i casi indecisi sono solo 2. ~~perché~~ Infatti quando $h=2$, $\beta = \arccos(3-h) = 0 \Rightarrow (\mp\sin\beta, \pm\beta) = (0,0)$ cioè i 3 casi indecisi quando $h=2$ coincidono nello stesso p.to di equilibrio.
Inoltre, quando $h=4$, $\beta = \pi \Rightarrow (\mp\sin\beta, \pm\beta) = (0,\pi)$, quindi anche per $h=4$ abbiamo che il caso indeciso è solo 1.

E' illuminante riassumere le conclusioni con il seguente linguaggio grafico.



~~Nel~~ Nel grafico precedente abbiamo utilizzato la periodicità rispetto a θ per proseguire il grafico nel passaggio da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3}{2}\pi$ e viceversa.

Riconosciamo che entrambi i casi indecisi corrispondono a 2 biforcazioni a forchetta di 2 p.ti di equil. stabili; siamo ~~per~~ quindi portati a congetturare che, in entrambi i casi, ~~la~~ i p.ti di equilibrio siano stabili.

Per verificarlo, basta osservare che

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \underset{\theta}{\text{unif}}\ U(\xi,\theta) = +\infty$$

allora U deve avere ^sempre^ un p.to di minimo al finito, che deve essere uno dei p.ti stazionari: $(0,0)$ e $(0,\pi)$.
Nel caso $h=2$, $(0,\pi)$ è un p.to di sella (1 autoval. dell'Hessiano è pos. e 1 neg.) $\Rightarrow$ il p.to di minimo non può che essere $(0,0)$.
Nel caso $h=4$, $(0,0)$ è un p.to di sella $\Rightarrow$ $(0,\pi)$ è un p.to di minimo.
Per il teor. di Lagrange-Dirichlet, se $h=2$, $(0,0)$ è p.to <u>stabile</u> e, se $h=4$, $(0,\pi)$ è p.to di equil. <u>stabile</u>.

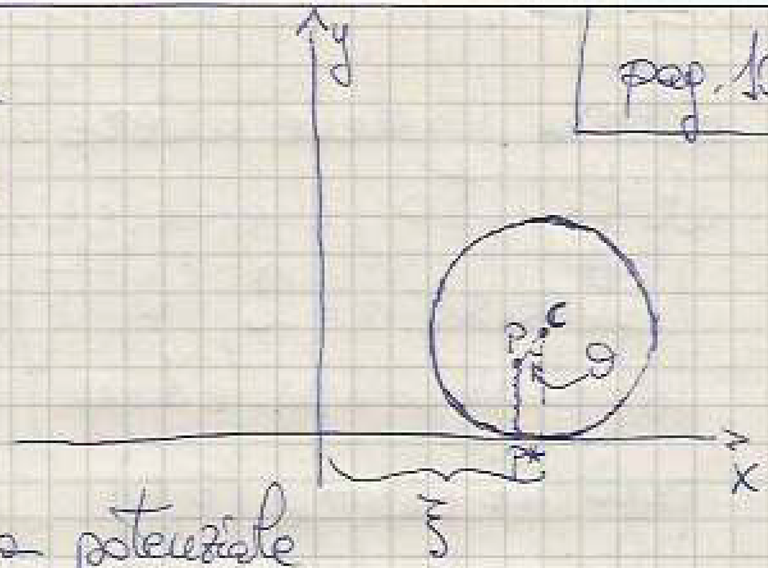
---

(3) Si studi ora il sistema quando $h=0$ e la molla collega P alla sua proiezione sull'asse delle x.

(3a) Si scrivano la lagrangiana e le eq. di Lagrange; si determinino le costanti del moto.

(3b) Si ponga nuovamente $l=g=k=m=1$, $M=R=2$; si studino delle condizioni iniziali t.c. il sistema è inizialmente in quiete, con l'asta che <u>non</u> è inizialmente in verticale; si esprima il periodo del moto, sotto forma di un opportuno integrale.

(3a) La figura che rappresenta il sistema è come quella qui a destra.



L'energia cinetica è come quella del punto (1). Per quanto riguarda l'energia potenziale, ci sono alcuni lievi cambiamenti:

$$U = Mg\,y_C + mg\,y_P + \frac{1}{2}k\,\overline{PP_*}^2$$

$$= MgR + mg(R - l\cos\theta) + \frac{1}{2}k(R - l\cos\theta)^2$$

$$= -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kl^2\cos^2\theta - kRl\cos\theta + \dots$$

$$= kl^2\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta - \left(\frac{mg}{kl} + \frac{R}{l}\right)\cos\theta\right] + \dots$$

dove sono state omesse delle inessenziali costanti additive.

La nuova lagrangiana assume quindi la forma seguente:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{\xi}^2 + ml\,\dot{\xi}\,\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\cancel{+mgl\cos\theta} - kl^2\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta - \left(\frac{mg}{kl} + \frac{R}{l}\right)\cos\theta\right]$$

Possiamo quindi scrivere le eq. di Lagrange come segue:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = \left(\dfrac{3}{2}M + m\right)\ddot{\xi} + ml\,\ddot{\theta}\cos\theta - ml\,\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = ml\,\ddot{\xi}\cos\theta + ml^2\ddot{\theta} - kl^2\sin\theta\left[\cos\theta - \left(\dfrac{mg}{kl} + \dfrac{R}{l}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Siccome la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, allora si conserva l'energia totale del sistema, cioè

$$E = T + U = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M+m\right)\dot{\xi}^2 + ml\,\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$
$$+ kl^2\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta - \left(\frac{mg}{kl}+\frac{R}{l}\right)\cos\theta\right].$$

Inoltre siccome non c'è dipendenza esplicita da ξ (cioè ξ è una variabile ciclica, ovvero $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0$), allora si conserva il momento coniugato a ξ, cioè

$$p_\xi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = \left(\frac{3}{2}M+m\right)\dot{\xi} + ml\,\dot{\theta}\cos\theta\,,$$

che da il significato fisico della componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema.

(3b) Siccome il sistema è inizialmente in quiete, allora

$$0 = p_\xi = \left(\frac{3}{2}M+m\right)\dot{\xi} + ml\,\dot{\theta}\cos\theta$$

Possiamo allora esprimere la conservazione dell'energia in modo che vi appaiano solo θ e $\dot{\theta}$; infatti, la formula precedente implica che

$$\dot{\xi} = -\frac{\dot{\theta}\cos\theta}{4}$$ (dove abbiamo sostituito i parametri con i loro valori), quindi

$$E = \frac{1}{8}\dot{\theta}^2\cos^2\theta - \frac{1}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - 3\cos\theta + \frac{\cos^2\theta}{2},$$ cioè

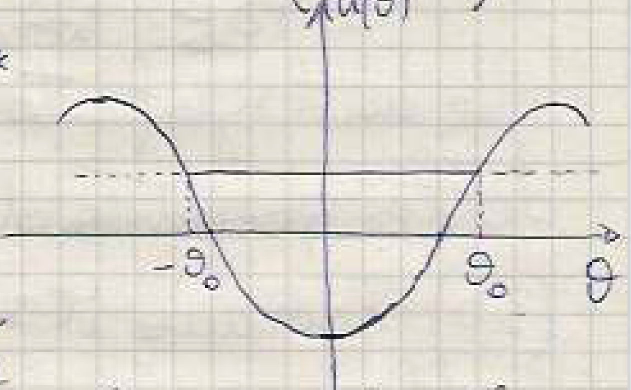
$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\cos^2\vartheta}{4}\right)\dot{\vartheta}^2\right]-3\cos\vartheta+\frac{\cos^2\vartheta}{2}=E.$$

Riscriviamo la legge di conservazione dell'energia nel modo seguente:

$$\frac{1}{2}\mu(\theta)\dot{\theta}^2+u(\theta)=E \quad , \text{ dove } \mu(\theta)=1-\frac{\cos^2\theta}{4} \text{ gioca il ruolo della massa.}$$

Inoltre, $u(\theta)=-3\cos\theta+\frac{\cos^2\theta}{2}$ è un'energia potenziale.

E' evidente che $u(\theta)$ è una funzione pari ed è crescente in $(0,\pi)$ (mentre è decrescente in $(-\pi,0)$), poiché $u'(\theta)=3\sin\theta-\sin\theta\cos\theta=\sin\theta(3-\cos\theta)$.



Siccome inizialmente il sistema è in quiete e l'asta non è in verticale, allora $E=u(\vartheta_0)$ con $\vartheta_0\neq 0,\pi$

Dallo studio del potenziale è evidente che, siccome il livello di energia è $E\in(u(0),u(\pi))$, allora il moto sarà periodico e compreso tra $-\vartheta_0$ e ϑ_0, che fungono da estremi di oscillazione.

Per calcolare il periodo, risolviamo per quadrature le eq. del moto: $\dot{\vartheta}=\pm\sqrt{\frac{2(E-u(\theta))}{\mu(\theta)}} \Rightarrow t-t_0=\pm\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2}{\mu(\psi)}(E-u(\psi))}}$.

Di conseguenza, il periodo è

$$T=4\int_0^{|\vartheta_0|}\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{\mu(\theta)}(u(\vartheta_0)-u(\theta))}},$$

dove $\mu(\theta)=1-\frac{\cos^2\theta}{4}$, $u(\theta)=-3\cos\theta+\frac{\cos^2\theta}{2}$ e abbiamo sfruttato il fatto che $u(\theta)=u(-\theta)$.