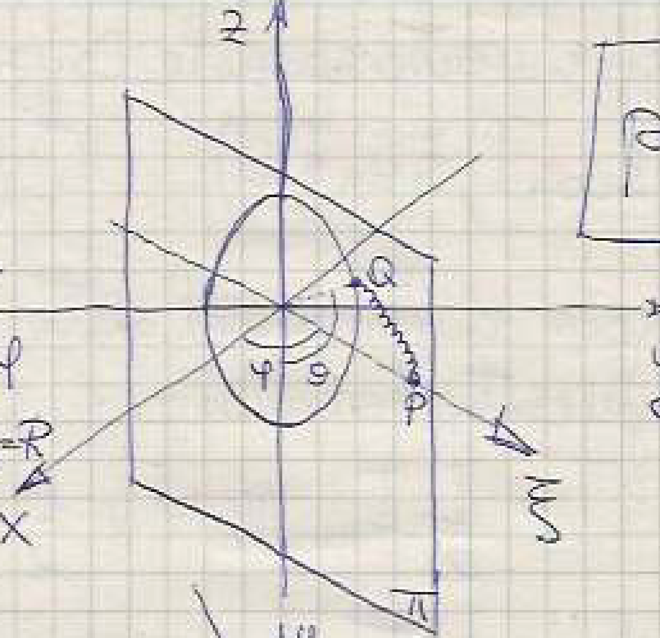
Esame di FM1
Settembre 2016



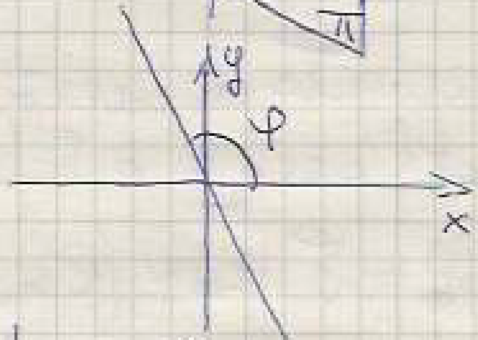
Anello centrato in O, Q e P $\in \Pi$

Angolo tra i piani Oxz e $\Pi = \varphi$

Massa anello $= M$ raggio anello $= R$

Massa del punto $Q = m$

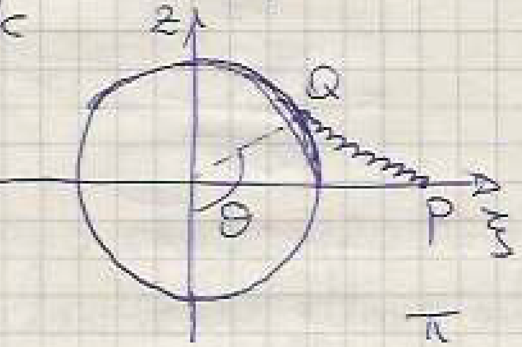
Massa del punto $P = \mu$



$P \in$ asse ξ del riferimento ortogonale $O\xi z$ del piano Π.

$\overline{OQ} = R$ ($Q \in$ anello)

costante molla tra P e $Q = k$



(1) Lagrangiana e (limitatamente al caso ~~...~~ in cui $\varphi = \Omega t$ con Ω costante).

Scegliamo come coordinate libere o lagrangiane del sistema (a 3 gradi di libertà!):

$$(\xi, \varphi, \vartheta)$$

definiti come nelle figure che compaiono in alto a destra in questa stessa pagina.

È utile scrivere le coordinate dei punti P e Q.

Nel piano Π, $P: (\xi, 0)$; $Q: (R\sin\vartheta, -R\cos\vartheta)$.

Nel riferimento spaziale $Oxyz$, abbiamo quindi che
$$P:(\xi\cos\varphi,\ \xi\sin\varphi,\ 0) \qquad Q:(R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ -R\cos\vartheta).$$

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma dei seguenti termini:
$$T = \frac{1}{2} I_{anello}\,\dot\varphi + \frac{1}{2} m \underline{v}_Q\cdot\underline{v}_Q + \frac{1}{2}\mu\,\underline{v}_P\cdot\underline{v}_P$$
dove il momento di inerzia dell'anello per rotazioni rispetto all'asse z è tale che
$$I_{anello} = \delta\int_0^{2\pi} R\,d\psi\,(R\sin\psi)^2 = \frac{M}{2\pi \cancel{R}}\int_0^{2\pi} d\psi\, R^{\cancel{3}\,2}\sin^2\psi$$
$$= \frac{MR^2}{2\cancel{\pi}}\cdot\cancel{\pi} = \frac{MR^2}{2}.$$
Dopo aver osservato che le coordinate di P non sono altro che quelle polari nel piano Oxy e le coordinate di Q sono quelle di un p.to sulla sfera di raggio R (dove φ è la longitudine e ϑ è l'angolo supplementare rispetto alla colatitudine), si ha che
$$\frac{1}{2}\mu\,\underline{v}_P\cdot\underline{v}_P = \frac{1}{2}\mu\left(\dot\xi^2 + \xi^2\dot\varphi^2\right)$$
$$\frac{1}{2} m\,\underline{v}_Q\cdot\underline{v}_Q = \frac{1}{2} m R^2\left(\dot\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2\right)$$
Ne segue che
$$T = \frac{1}{2}\mu\,\dot\xi^2 + \frac{1}{2}\left[\mu\,\xi^2 + \left(\frac{M}{2} + m\sin^2\vartheta\right)R^2\right]\dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m R^2\dot\vartheta^2$$

Per quanto riguarda i termini potenziali, cominciamo ad osservare che non c'è nessun contributo dovuto all'anello, poiché il suo baricentro è costantemente posizionato in corrispondenza all'origine.
Il potenziale è dato dalla somma dei seguenti termini:

$$U = mg z_Q + \frac{1}{2} k \overline{PQ}^2$$
$$= -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[(\xi - R\sin\theta)^2 + R^2\cos^2\theta\right]$$
$$= -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - 2R\xi\sin\theta + R^2\right)$$

Possiamo ora scrivere la lagrangiana completa del sistema a 3 gradi di libertà:

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\left[\mu\xi^2 + \left(\frac{M}{2} + m\sin^2\theta\right)R^2\right]\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$
$$+ mgR\cos\theta - \frac{1}{2}k\xi^2 + kR\xi\sin\theta,$$

dov'è stata omessa l'inessenziale costante additiva $\frac{1}{2}kR^2$, perché non influenza la dinamica.
Introduciamo ora un nuovo vincolo in modo tale che

$$\varphi = \Omega t,$$

La nuova lagrangiana per il sistema a 2 gradi di libertà è allora data da

$$\mathcal{L}(\xi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\theta}) = L(\xi, \varphi, \theta, \dot{\xi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})\Big|_{\varphi = \Omega t},$$

cioè
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\mu\Omega^2 - k)\xi^2 + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta + kR\xi\sin\theta,$$
dove abbiamo nuovamente omesso una costante additiva (e cioè $MR^2\Omega^2/4$), perché è ininfluente sulla dinamica.

- Si noti che alcuni termini che prima (in L) erano cinetici (perché erano $O(\dot{\varphi}^2)$), adesso (in $\mathcal{L}$) sono potenziali!!!

Le eq. di Lagrange del sistema (in presenza del vincolo aggiuntivo $\varphi = \Omega t$) assumono la forma seguente:
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = \mu\ddot{\xi} + (k - \mu\Omega^2)\xi - kR\sin\theta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mR^2\ddot{\theta} - mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta \\ \qquad\qquad - kR\xi\cos\theta = 0 \end{cases}$$

(2a) Sempre limitatamente al caso $\varphi = \Omega t$, si determinino le configurazioni che sono in quiete rispetto al piano Π. ! Sia $\mathcal{L} = T - U$ dove $T = O(\|\dot{\xi},\dot{\theta}\|^2)$ e $U = U(\xi,\theta)$.

Risolviamo il sistema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\xi} = (k - \mu\Omega^2)\xi - kR\sin\theta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial\theta} = -mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta - kR\xi\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Dall'eq. $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = 0$ segue che

- Nel caso $\underline{k = \mu\Omega^2}$, allora $\sin\theta = 0 \Rightarrow \underline{\theta = 0, \pi}$.
- Se $\underline{k \neq \mu\Omega^2} \Rightarrow \underline{\xi = \frac{kR\sin\theta}{k-\mu\Omega^2}}$.

Introduciamo le informazioni dedotte dalla prima eq. del sistema nella seconda eq. (cioè $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0$).

- Se $\underline{k = \mu\Omega^2}$, allora

$$-kR\xi \cdot (\pm 1) = 0 \Rightarrow \underline{\xi = 0},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\sin\theta = 0$ e $\cos\theta = \pm 1$ (poiché $\theta = 0, \pi$).

- Se $\underline{k \neq \mu\Omega^2}$, allora

$$-mR^2\Omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta - \frac{k^2R^2}{k-\mu\Omega^2}\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \left(m\Omega^2 + \frac{k^2}{k-\mu\Omega^2}\right)R^2\sin\theta\cos\theta = mgR\sin\theta$$

$$\sin\theta = 0 \Rightarrow \underline{\theta = 0, \pi}$$

$$\left(m\Omega^2 + \frac{k^2}{k-\mu\Omega^2}\right)R^{\cancel{2}}\cos\theta = mg\cancel{R}$$

$$\Downarrow$$

$\underline{\theta = \pm\beta}$, dove $\beta := \arccos\left(\frac{mg}{\tilde{c}R}\right)$ con $\tilde{c} = m\Omega^2 + \frac{k^2}{k-\mu\Omega^2}$.

Ovviamente, le soluzioni $\theta = \pm\beta$ esistono sse
$$\left|\frac{mg}{\tilde{c}R}\right| \leq 1.$$
Al fine di completare la soluzione del sistema (nel caso in cui $k \neq \mu\Omega^2$), dobbiamo reintrodurre
$$\theta = 0, \pi, \pm\beta$$
nell'eq. che abbiamo dedotto da $\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$, cioè
$$\xi = \frac{kR\sin\theta}{k - \mu\Omega^2},$$
se ne deduce che

quando $\theta = 0, \pi \Rightarrow \xi = 0$

quando $\theta = \pm\beta \Rightarrow \xi = \pm\frac{R\sin\beta}{k - \mu\Omega^2}$

Riassumendo, i punti di equilibrio sono
$$(\xi, \theta) \in \left\{(0,0), (0,\pi), \left(\pm\frac{kR\sin\beta}{k-\mu\Omega^2}, \pm\beta\right)\right\}.$$

(2b) Limitatamente al sottocaso di (2a), tale per cui i valori dei parametri sono i seguenti $m = \mu = 1$, $\Omega = 1$, $R = 1$, $k = 2$, $g = 5/2$, si studi la stabilità dei punti di equilibrio.

Come al solito, occorre calcolare l'Hessiano del potenziale:

$$\mathrm{Hess}\,U = \begin{pmatrix} k-\mu\Omega^2 & -kR\cos\theta \\ -kR\cos\theta & -mR^2\Omega^2(2\cos^2\theta-1)+mgR\cos\theta+kR\xi\sin\theta \end{pmatrix}$$

Nel caso specifico dei valori dei parametri che sono riportati nel testo, si ha che

$$\mathrm{Hess}\,U = \begin{pmatrix} 1 & -2\cos\theta \\ -2\cos\theta & 1-2\cos^2\theta+\frac{5}{2}\cos\theta+2\xi\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Studiamo separatamente i vari p.ti di equilibrio e, corrispondentemente, gli autovalori delle matrice Hessiane.

- Caso $(\xi,\theta)=(0,0)$

$$\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=0}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1-2+\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Siccome $\det\left(\mathrm{Hess}\,U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=0}}\right) = \frac{3}{2}-4=-5/2<0$, allora un autoval. è pos. e 1 è neg. $\Rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE.

– Caso $(\xi, \theta) = (0, \pi)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=\pi}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1-2-\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Siccome $\det\left(\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=\pi}}\right) = -\frac{7}{2} - 4 = -\frac{15}{2} < 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. è pos. e 1 è neg. $\Rightarrow (0, \pi)$ è INSTABILE.

– Caso $(\xi, \theta) = \left(\pm \frac{kR\sin\beta}{k-\mu\Omega^2}, \pm\beta\right)$

Cominciamo ad osservare che, per i fissati valori dei parametri (così come precisato dal testo) abbiamo che $\tilde{c} = m\Omega^2 + \frac{k^2}{k-\mu\Omega^2} = 1 + \frac{4}{2-1} = 5$

$$\Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{mg}{\tilde{c}R}\right) = \arccos\left(\frac{5/2}{5}\right) = \pi/3$$

$$\Rightarrow kR\sin\beta = 2\cdot 1 \cdot \sin\pi/3 = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

Possiamo finalmente scrivere l'Hessiano per questa coppia di p.ti di equilibrio:

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=\pm\sqrt{3}\\ \theta=\pm\pi/3}} = \begin{pmatrix} 1 & -2\cdot 1/2 \\ -2\cdot 1/2 & 1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot(\pm\sqrt{3})\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 19/4 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\det\left(\mathrm{Hess}\,\mathcal{U}\Big|_{\substack{\xi=\pm\sqrt{3}\\ \vartheta=\pm\pi/3}}\right)=\frac{19}{4}-1=\frac{15}{4}>0$

e $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Hess}\,\mathcal{U}\Big|_{\substack{\xi=\pm\sqrt{3}\\ \vartheta=\pm\pi/3}}\right)=1+\frac{19}{4}=\frac{23}{4}>0$,

allora evidentemente entrambi gli autoval. sono positivi, quindi sia $(\xi,\vartheta)=(\sqrt{3},\pi/3)$ che $(\xi,\vartheta)=(-\sqrt{3},-\pi/3)$ p.ti di equilibrio STABILI.

(3a) Si riconsideri il problema iniziale, cioè senza vincoli aggiuntivi e con valori generici dei parametri.
Si determinino le costanti del moto del sistema.

Trattandosi di un sistema con vincoli ideali e indipendenti dal tempo, si conserva l'energia totale meccanica del sistema, ovvero

$$E=T+U=\frac{1}{2}\mu\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}\left[\mu\xi^2+\left(\frac{M}{2}+m\sin^2\vartheta\right)R^2\right]\dot{\varphi}^2$$
$$+\frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2-mgR\cos\vartheta+\frac{1}{2}k\xi^2-kR\xi\sin\vartheta.$$

Si osserva che la variabile φ è ciclica rispetto alla lagrangiana completa L, cioè

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0.$$

Ne segue che si conserva il momento cinetico coniugato a φ, cioè

$$J_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \left[\mu\xi^2 + \left(\frac{M}{2} + m\sin^2\vartheta\right)R^2\right]\dot\varphi .$$

Con qualche calcolo (che omettiamo, per brevità), sarebbe facile verificare che J è la componente verticale del momento angolare totale del sistema.

(3b) Si consideri ora il sistema quando è soggetto ~~dal~~ a un ulteriore vincolo, tale che P rimane costantemente sovrapposto all'anello in corrispondenza ~~di~~ all'intersezione tra l'anello stesso e la semiretta delle ξ negative.

Inoltre, ci limitiamo a studiare il caso in cui

$$\mu = \frac{M}{2} \quad e \quad m = 2M .$$

Si considerino delle condizioni iniziali tali che al tempo $t=0$ il punto Q si trova nel quarto quadrante del piano Oxz, l'angolo formato da OQ con la semiretta ~~sul~~ delle z negative è uguale a $\pi/6$; sia inoltre ν il valore della velocità angolare iniziale dell'angolo di rotazione tra Π e Oxz, mentre la componente ~~iniziale~~ verticale della velocità iniziale del punto Q è nulla.

Si determini ν in modo t. c., il punto Q (lungo la sua orbita) formi un angolo massimo uguale a $\pi/3$ tra OQ e la semiretta delle z negative.

———— o ————

L'ulteriore vincolo cui è soggetto il punto P si esprime grazie alla seguente, semplice, relazione:

$$\xi = -R.$$

Il sistema (in presenza del nuovo vincolo) è ora ~~soggetto~~ descritto dalla nuova Lagrangiana

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi,\vartheta,\dot\varphi,\dot\vartheta) = \mathcal{L}(\xi,\varphi,\vartheta,\dot\xi,\dot\varphi,\dot\vartheta)\Big|_{\xi=-R},$$

cioè

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\left[\frac{M}{2}R^2 + \left(\frac{M}{2} + 2M\sin^2\vartheta\right)R^2\right]\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}2MR^2\dot\vartheta^2$$

$$+ 2MgR\cos\vartheta - kR^2\sin\vartheta$$

$$= \frac{1}{2}\left[M\left(1+2\sin^2\vartheta\right)R^2\right]\dot\varphi^2 + MR^2\dot\vartheta^2 + 2MgR\cos\vartheta - kR^2\sin\vartheta,$$

dove è stata omessa l'inessenziale costante additiva $-\frac{1}{2}kR^2$.

Procedendo come al punto (3a), si osserva immediatamente che sono soddisfatte le due seguenti leggi di conservazione:

$$\begin{cases} \tilde{E} = \frac{1}{2}\left[M\left(1+2\sin^2\vartheta\right)R^2\right]\dot\varphi^2 + MR^2\dot\vartheta^2 - 2MgR\cos\vartheta + kR^2\sin\vartheta \\ \tilde{J} = \left[M\left(1+2\sin^2\vartheta\right)R^2\right]\dot\varphi \end{cases}$$

Si può quindi procedere ~~come~~ utilizzando il metodo del potenziale efficace, ponendo

$$\dot{\varphi} = \frac{\tilde{J}}{M(1+2\sin^2\theta)R^2} \quad e \quad \tilde{E} = MR^2\dot{\theta}^2 + \tilde{U}_{eff}(\theta),$$

dove $\tilde{U}_{eff}(\theta) = \dfrac{\tilde{J}^2}{2M(1+2\sin^2\theta)R^2} - 2MgR\cos\theta + kR^2\sin\theta$

La situazione descritta dal testo dell'esercizio è quella tale per cui $\theta(0) = \pi/6$ e $\theta_+ = \pi/3$ sono le barriere di potenziale per il moto, ne segue che

$$\tilde{E} = U_{eff}(\pi/6) = U_{eff}(\pi/3)$$

$$\boxed{\frac{\tilde{J}^2}{2M\left(1+\frac{1}{2}\right)R^2} - \sqrt{3}MgR + \frac{kR^2}{2} = \frac{\tilde{J}^2}{2M\left(1+\frac{3}{2}\right)R^2} - MgR + kR^2\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Per comprendere che una barriera di potenziale è situata in $\theta(0) = \pi/6$, abbiamo sfruttato il fatto che $\dot{\theta}_0 = 0$.

Risolviamo ora l'eq. evidenziata nel rettangolo rispetto a $\tilde{J}$: $\dfrac{\tilde{J}^2}{MR^2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) = (\sqrt{3}-1)\left(MgR + \dfrac{kR^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow \tilde{J}^2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{15}{2}\left(\frac{2g}{R} + \frac{k}{M}\right)MR^4$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{J} = \pm \frac{\sqrt{15(\sqrt{3}-1)}}{2} \sqrt{\frac{2g}{R} + \frac{k}{M}} \cdot MR^2$$

Dalla eq. di conservazione del mom. ang., calcola-ta per $t=0$, otteniamo

$$\tilde{J} = M\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right) R^2 \nu,$$

quindi

$$\nu = \pm \frac{\sqrt{15(\sqrt{3}-1)}}{3} \sqrt{\frac{2g}{R} + \frac{k}{M}}.$$