

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
21 Settembre 2016

Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali (individuati rispettivamente dalle lettere Q e P) e da un anello, i quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $0xyz$, con asse delle z verticale. L'anello è perfettamente rigido, di spessore infinitesimo, di massa M , di raggio R e di densità di massa omogenea al suo interno; esso ha il suo centro costantemente sovrapposto all'origine O ed è libero di ruotare solo in modo tale che il suo asse di rotazione coincide con la retta delle z . Denotiamo con la lettera Π il piano (mobile nel tempo) cui appartiene l'anello; sia $O\xi z$ il riferimento cartesiano che è solidale con Π e ha, ovviamente, l'origine in O e l'asse delle ordinate in verticale. Il punto Q ha massa m ed è vincolato in modo tale che si può muovere solo sull'anello (in altri termini, $Q \in \Pi$ e $\overline{OQ} = R$). Il punto P ha massa μ e, anch'esso, giace in Π , poiché è vincolato a muoversi sull'asse delle ascisse ξ del riferimento cartesiano $O\xi z$, che è solidale al piano Π stesso. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega Q a P . Si supponga che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo tale che il punto P può attraversare l'anello e il punto Q senza scontrarsi con questi ultimi; si risponda alle domande seguenti.

- (1A) Si scriva la lagrangiana del sistema meccanico sopra descritto.
- (1B) Si scrivano le equazioni di Lagrange limitatamente al caso in cui la velocità angolare $\dot{\varphi} = \Omega$, laddove Ω è *costante* e φ è l'angolo che ha vertice nell'origine O ed è formato dalle semirette con valori positivi delle ascisse x e ξ (cioè φ è un angolo che individua la giacitura di Π rispetto al piano verticale Oxz).
- (2A) Sempre per quanto riguarda il caso in cui è imposto anche l'ulteriore vincolo descritto dall'equazione $\dot{\varphi} = \Omega$, si determinino tutte le configurazioni di equilibrio, tali per cui *il sistema è in quiete rispetto al riferimento cartesiano $O\xi z$ che è solidale al piano Π* .
- (2B) Si studi la stabilità (rispetto al piano Π) delle soluzioni di equilibrio determinate al punto (2A), limitatamente al sotto-caso in cui i valori dei parametri sono fissati come segue: $M = m = \mu = \Omega = R = 1$, $k = 2$ e $g = 5/2$.
- (3A) Si riconsideri il sistema meccanico in tutta la sua generalità, cioè così come è stato descritto all'inizio del testo fino al punto (1A), escludendo

il vincolo aggiuntivo e senza assumere che i valori parametri siano fissati in qualche modo.

Si determinino gli integrali primi del sistema.

- (3B) Si supponga che il sistema meccanico sia soggetto a un ulteriore vincolo di modo che l'ascissa (nel piano Π) del punto P sia costantemente tale che $\xi = -R$. Si considerino delle condizioni iniziali, tali che al tempo $t = 0$ le coordinate del punto Q sono $(\xi(0), z(0)) = (R/2, -R\sqrt{3}/2)$ e la sua velocità è puramente orizzontale e uguale a $R|\nu|$ in norma.

Limitatamente al caso in cui $m = 2M$ e $\mu = M/2$, si determinino i valori della velocità angolare ν tali per cui l'angolo ϑ (formato dal segmento di vertici O e Q con il semiasse verticale del riferimento $Oxyz$ che è costituito da valori negativi delle z) oscilla tra $\pi/6$ e $\pi/3$, durante il moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali.