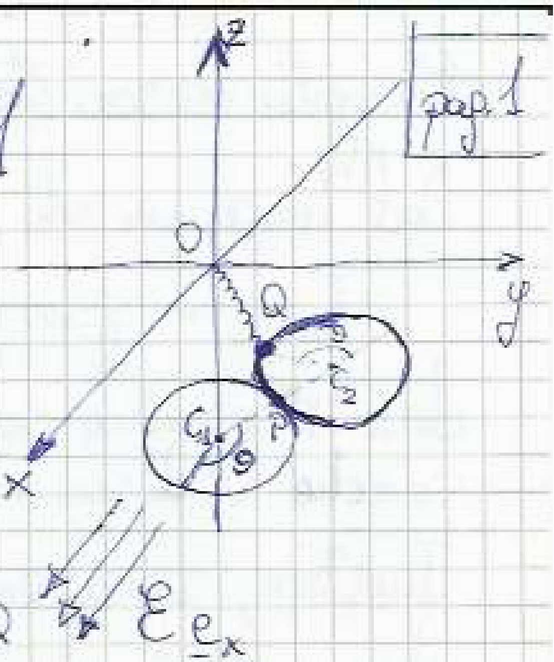
II appello scritto di FM1

Luglio 2016

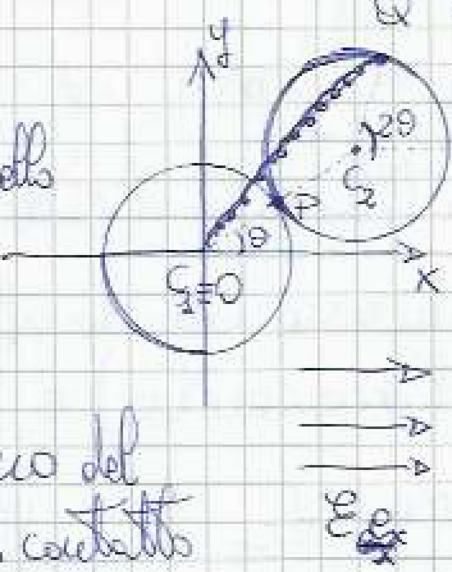


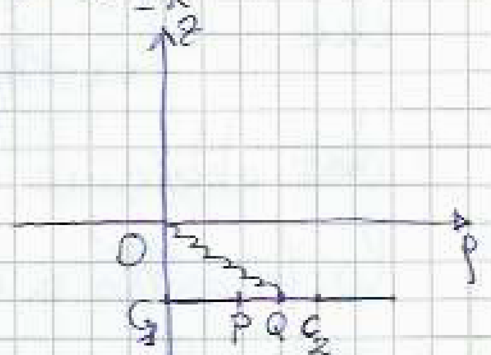
Disco di centro C_1 e anello di centro C_2 sono orizzontali.

Raggio del disco = R

" dell'anello = R

Massa disco = m = Massa anello





Centro C_1 su asse z.

Disco non ruota.

Anello rotola all'esterno del disco in modo che ci sia contatto nel solo punto P.

Coordinate orizzontali di P: $R(\cos\theta, \sin\theta)$

" " " Q: $R(2\cos\theta + \cos 2\theta, 2\sin\theta + \sin 2\theta)$

Massa Q = 0; carica Q = $q > 0$, campo elettrico = $\mathcal{E}\underline{e}_x$ con $\mathcal{E} > 0$; molla di costante elastica k tra O e Q.

— o —

(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange. Si calcoli la velocità dell'anello nel punto di contatto P.

— o —

Ovviamente, adottiamo z e θ come coordinate libere o lagrangiane, dato z è la quota orizzontale e θ è

l'angolo descritto nelle figure precedenti.
Dal teorema di König otteniamo che

$$T_{disco} = \frac{1}{2} m \underline{v}_{C_1} \cdot \underline{v}_{C_1} ,$$

dove il termine corrispondente allo spin non compare perché il disco non ruota.
Inoltre, sempre per il teorema di König, abbiamo che

$$T_{anello} = \frac{1}{2} m \underline{v}_{C_2} \cdot \underline{v}_{C_2} + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 ,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che l'inerzia dell'anello (rispetto a un asse normale al piano dell'anello e passante per il suo centro) è mR^2.
Per determinare $\underline{v}_{C_2}$ e la vel. ang. di rotazione ω, osserviamo che le coord. orizzontali di C_2 sono

$$2R(\cos\vartheta , \sin\vartheta) ;$$

di conseguenza, le coord. orizzontali del vettore $\overrightarrow{C_2 Q}$ (che descrive, ovviamente, la posizione di Q rispetto a C_2) sono

$$R(\cos 2\vartheta , \sin 2\vartheta) ;$$

di conseguenza, la velocità ~~ang~~ angolare di rotazione è

$$\omega = 2\dot{\vartheta} ;$$

inoltre, $\underline{v}_{C_2} = \left(-2R\dot{\vartheta}\sin\vartheta , 2R\dot{\vartheta}\cos\vartheta , \dot{z}\right)$

$$\Rightarrow T_{anello} = \frac{1}{2} m \left(4R^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2} m \left(4R^2\dot{\vartheta}^2\right)$$

Per quanto riguarda i vari termini dell'energia potenziale, si osservi che

$$U = \frac{1}{2} k \overline{OQ}^2 - qE x_Q + 2mg z_Q$$

dove

$$\overline{OQ}^2 = x_Q^2 + y_Q^2 + z_Q^2 = R^2 4\cos^2\theta + 4R^2\cos\theta\cos 2\theta + R^2\cos^2 2\theta$$
$$+ 4R^2\sin^2\theta + 4R^2\sin\theta\sin 2\theta + R^2\sin^2 2\theta + z^2 =$$
$$= 5R^2 + 4R^2(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta) + z^2 =$$
$$= 5R^2 + 4R^2\cos\theta + z^2$$

Omettendo costanti additive, otteniamo che

$$U = \frac{1}{2} k (z^2 + 4R^2\cos\theta) - qER(2\cos\theta + \cos 2\theta) + 2mgz$$

Possiamo quindi determinare la Lagrangiana scrivendo $L = T_{Disco} + T_{anello} - U$

$$\Longrightarrow L = m\dot{z}^2 + 4mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kz^2 - 2kR^2\cos\theta$$
$$+ qER(2\cos\theta + \cos 2\theta) - 2mgz$$

Di conseguenza, le equazioni di Lagrange diventano

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2m\ddot{z} + kz + 2mg = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 8mR^2\ddot{\theta} - 2kR^2\sin\theta + 2qER(\sin\theta + \sin 2\theta) = 0 \end{cases}$$

Per calcolare la velocità dell'anello nel p.to di contatto P, utilizziamo la formula fondamentale della cinematica rigida nel modo seguente:

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{C_2} + \underline{\omega} \wedge \overrightarrow{C_2P},$$

in modo t.c. C_2 viene considerato come l'origine del sistema di riferimento "mobile" solidale al corpo rigido; di conseguenza, per quanto mostrato nelle pagine precedenti

$$\underline{\omega} = 2\dot{\theta}\,\underline{e}_z, \quad \overrightarrow{C_2P} = -R(\cos\theta\,\underline{e}_x + \sin\theta\,\underline{e}_y)$$

$$\underline{v}_{C_2} = 2R\dot{\theta}(-\sin\theta\,\underline{e}_x + \cos\theta\,\underline{e}_y) + \dot{z}\,\underline{e}_z$$

$$\Rightarrow \underline{v}_P = -2R\dot{\theta}\sin\theta\,\underline{e}_x + 2R\dot{\theta}\cos\theta\,\underline{e}_y - 2R\dot{\theta}\cos\theta\,\underbrace{\underline{e}_z \wedge \underline{e}_x}_{=\underline{e}_y} - 2R\dot{\theta}\sin\theta\,\underbrace{\underline{e}_z \wedge \underline{e}_y}_{=-\underline{e}_x} + \dot{z}\,\underline{e}_z = (\cancel{-2R\dot{\theta}\sin\theta} + \cancel{2R\dot{\theta}\sin\theta})\,\underline{e}_x$$

$$+ (\cancel{2R\dot{\theta}\cos\theta} - \cancel{2R\dot{\theta}\cos\theta})\,\underline{e}_y + \dot{z}\,\underline{e}_z = \dot{z}\,\underline{e}_z$$

Possiamo quindi concludere che la velocità dell'anello nel punto di contatto è puramente verticale e quindi è uguale a quella di tutto il disco, quindi ~~non è~~ la velocità relativa tra disco e anello (nel punto di contatto) è <u>nulla</u>. In altri termini, l'anello <u>rotola senza strisciare</u> all'esterno del disco stesso.

(2) Si determinino i p.ti di equilibrio e se ne studi la stabilità.

Per determinare i p.ti di equilibrio studiamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} = kz + 2mg = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -2kR^2 \sin\vartheta + 2qER \sin\vartheta (1 + 2\cos\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima eq. si deduce che

$$z = -\frac{2mg}{k}$$

Dalla seconda eq. segue che

$$2qER \sin\vartheta \cdot \left(2\cos\vartheta + 1 - \frac{kR}{qE}\right) = 0$$

$$\vartheta = 0, \pi$$

$$\vartheta = \pm\beta \text{ dove } \beta = \arccos\left(\frac{1}{2} + \frac{kR}{2qE}\right)$$

purché $\frac{kR}{2qE} \leq \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{kR}{qE} \leq 3.$$

Riassumendo, i possibili p.ti di equilibrio si hanno per $(z, \vartheta) \in \left\{\left(-\frac{2mg}{k}, 0\right), \left(-\frac{2mg}{k}, \pi\right), \left(-\frac{2mg}{k}, \pm\beta\right)\right\}$

dove la seconda coppia $\exists$ sse $\frac{kR}{qE} \leq 3$.

Passiamo a studiare la stabilità a questo scopo, calcoliamo l'Hessiano

$$\text{Hess}\,U = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2R(q\mathcal{E}-kR)\cos\vartheta + 4q\mathcal{E}R(2\cos^2\vartheta - 1) \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora i casi particolari

- Caso $(z, \vartheta) = \left(-\frac{2mg}{k}, 0\right)$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{z=-\frac{2mg}{k} \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2R(3q\mathcal{E}-kR) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det \text{Hess}\,U = 2kR(3q\mathcal{E}-kR) > 0$ sse $\frac{kR}{q\mathcal{E}} < 3$.

Se $\frac{kR}{q\mathcal{E}} < 3 \Rightarrow$ i 2 autoval. sono evidentemente positivi (perché la matrice è diag.)

$\Rightarrow$ p.to di equil. STABILE

Se $\frac{kR}{q\mathcal{E}} = 3 \Rightarrow$ 1 autoval. è pos. e 1 è nullo

$\Rightarrow$ occorre un supplemento di indagine

Se $\frac{kR}{q\mathcal{E}} > 3 \Rightarrow$ 1 autoval. è pos. e 1 è neg.

$\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE

- Caso $(z, \vartheta) = \left(-\frac{2mg}{k}, \pi\right)$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{z=-2mg/k \\ \vartheta=\pi}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2R(q\mathcal{E}+kR) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2 autoval. sono positivi

$\Rightarrow$ è un p.to di equilibrio

STABILE

- Caso $(z, \vartheta) = \left(-\frac{2mg}{k}, \pm\beta\right)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{z=-\frac{2mg}{k}\\ \vartheta=\pm\beta}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2R(q\mathcal{E}-kR)\left(-\frac{1}{2}+\frac{kR}{2q\mathcal{E}}\right) + 4q\mathcal{E}R\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{kR}{2q\mathcal{E}}\right)^2-1\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -q\mathcal{E}R + \cancel{kR^2} + kR^2 - \frac{k^2R^3}{q\mathcal{E}} + 2q\mathcal{E}R - 4kR^2 + \frac{2k^2R^3}{q\mathcal{E}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -3q\mathcal{E}R - 2kR^2 + \frac{k^2R^3}{q\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{R}{q\mathcal{E}}\left(kR - 3q\mathcal{E}\right)\left(kR + q\mathcal{E}\right) \end{pmatrix}$$

Se $\frac{kR}{q\mathcal{E}} < 3 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg.

$\Rightarrow$ p.ti di equil. INSTABILI

Se $\frac{kR}{q\mathcal{E}} = 3 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo

$\Rightarrow$ serve un suppl. di indagine

Se $\frac{kR}{q\mathcal{E}} > 3 \Rightarrow$ quei p.ti di equil. $\nexists$

Consideriamo ora il "caso critico"
$$\frac{kR}{qE} = 3.$$
Osserviamo che, dalla discussione effettuata in precedenza si prospetta il classico scenario di una biforcazione a forchetta di un p.to di equilibrio instabile in corrispondenza ~~ossia~~ alla transizione del parametro kR/qE per il valore 3.

Cerchiamo allora di verificare che, quando $kR/qE = 3$, il p.to di eq. $\left(-\frac{2mg}{k}, 0\right)$ è instabile.

Osserviamo che, come verrà discusso approfonditamente in seguito, le eq. di Lagrange sono separabili.

In particolare, consideriamo soluzioni del tipo
$$t \mapsto \left(z(t) = -\frac{2mg}{k}, \vartheta(t)\right)$$
il cui moto è puramente orizzontale ed è regolato dalla conservazione della seguente energia meccanica per un problema 1-D:
$$4mR^2\dot{\vartheta}^2 + U(\vartheta) = E_0,$$
dove
$$U(\vartheta) = qER\left(6\cos\vartheta - 2\cos\vartheta - \cos 2\vartheta\right)$$
$$= qER\left(4\cos\vartheta - \cos 2\vartheta\right)$$
Studiamo rapidamente l'andamento di $U(\vartheta)$.

$$U'(\theta) = qER(-4\sin\theta + 4\sin\theta\cos\theta)$$
$$= 4qER\sin\theta(\cos\theta - 1)$$

$\Rightarrow U'(\theta) = 0$ per $\theta = 0, \pi$

$$U''(\theta) = qER(-4\cos\theta + 4\cos 2\theta)$$

$\Rightarrow U''(\pi) = 8qER > 0 \Rightarrow \theta = \pi$ è p.to di minimo

$\Rightarrow U''(0) = 0$, continuiamo a calcolare derivate per comprendere la natura del p.to stazionario $\theta = 0$ (cioè è min, max. o flesso?).

$$U'''(\theta) = qER(+4\sin\theta - 8\sin 2\theta)$$

$\Rightarrow U'''(0) = 0$

$$U^{IV}(\theta) = qER(4\cos\theta - 16\cos 2\theta) =$$

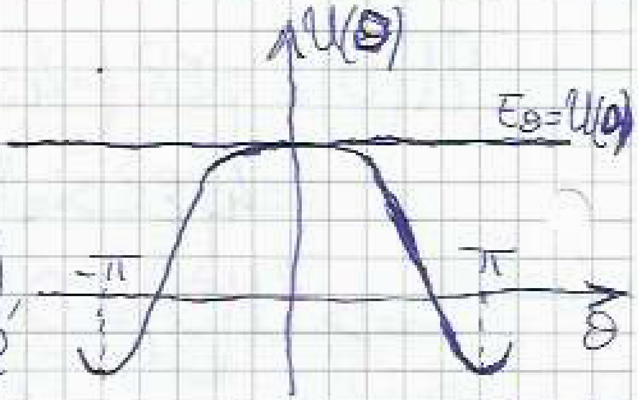
$\Rightarrow U^{IV}(0) = -12qER$

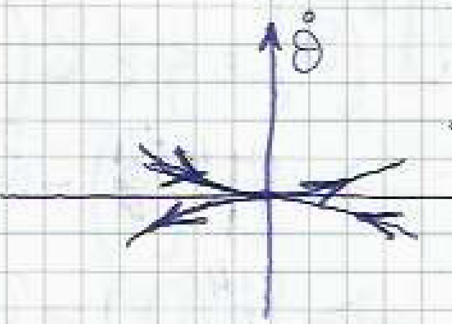
Siccome la prima derivata che è diversa da zero tra quelle in $\theta = 0$ è quella quarta e è neg., allora $\theta = 0$ è un p.to di massimo (quartico).

Dall'analisi qualitativa del moto, segue immediatamente che quei moti

$t \mapsto \left(-\frac{2mg}{k}, \alpha(t)\right)$

dove $\alpha(0)$ è prossimo a 0 e $\dot{\alpha}(0)$ è t.c. $4mR^2(\dot{\alpha}(0))^2 + U(\alpha(0)) = U(0)$, sono moti t.c. si allontanano dal p.to di equilibrio lungo la separatrice $\Rightarrow$ $\left(-\frac{2mg}{k}, 0\right)$ è un p.to di equilibrio INSTABILE, quando $\frac{kR}{qE} = 3$.





(3a) Si risolvono "per quadrature" le eq. di Lagrange.

(3b) Si consideri un dispositivo meccanico come quello descritto nel testo, in cui tutti i parametri sono fissati, ad eccezione di E, che può essere variato prima di preparare le condizioni iniziali e osservare il conseguente moto. Si dimostri che $\forall$ fissato valore M arbitrariamente grande, $\exists$ delle piccole oscillazioni t.c. il rapporto

$$\frac{T_o}{T_z} > M,$$

dove T_o e T_z sono rispettivamente i periodi di oscillazione del moto orizzontale e di quello verticale.

(3a) L'osservazione fondamentale è che le eq. di Lagrange si separano, cioè la prima non dipende da ϑ (e $\dot\vartheta$ o $\ddot\vartheta$) e la seconda non dipende da z (e $\dot z$ o $\ddot z$).

La prima eq. di Lagr., cioè

$$2m\ddot z + kz + 2mg = 0,$$

è del ~~ty~~ tipo dell'oscillatore armonico pesante, ne segue che

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi) - \frac{2mg}{k},$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ e (A, φ) sono costanti di integrazione fissate dalle cond. iniz.

Per quanto riguarda la seconda eq. diff., ricordiamo che vale la conservazione dell'energia per la componente orizzontale del moto:

$$4mR^2\dot\vartheta^2 + U(\vartheta) = E_\vartheta,$$

come discusso nel p.to (2), dove si ~~possono~~ può trovare la definizione di $U(\vartheta)$.

Procedendo per separazione di variabili si ottiene

$$\dot\vartheta = \pm\sqrt{\frac{E_\vartheta - U(\vartheta)}{4mR^2}} \rightarrow t - t_0 = \pm\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\psi \sqrt{\frac{4mR^2}{E_\vartheta - U(\psi)}},$$

cioè la soluzione per quadrature dell'eq. $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}\frac{\partial L}{\partial\vartheta}$

Osserviamo che il periodo
$T_z = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$ <u>non</u> dipende dalle condizioni iniziali.

Nel limite di piccole oscillazioni, possiamo avere come periodo del moto nel piano

$$T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{8mR^2}{U''(\pi)}},$$

oppure, limitatamente al caso $\frac{kR}{qE}<3$,

$$T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{8mR^2}{U''(0)}}.$$

Ricordiamo che

$$U''(\theta) = (-2kR^2+2qER)\cos\theta + 4qER\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow U''(\pi) = 2(kR+qE)R$$

$$\Rightarrow \frac{T_\theta}{T_z} = \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}m\cancel{R^2}}{\cancel{2}(kR+qE)\cancel{R}}\frac{k}{\cancel{2m}}} = \sqrt{\frac{2}{1+\frac{qE}{kR}}} < 2.$$

Per avere che il rapporto $T_\theta/T_z \to M$ con M arbitrariamente grande, occorre ~~una~~ considerare oscillazioni attorno a $\theta=0$, cioè

$$\frac{T_\theta}{T_z} = \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}mR^2}{U''(0)}\frac{k}{\cancel{2m}}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}^{2}}{(\cancel{6}^{3}\frac{qE}{kR}-\cancel{2}^{1})}}$$

Siccome deve essere $\frac{kR}{qE}<3$, allora prendiamo

$\frac{q\mathcal{E}}{kR} \gtrsim \frac{1}{3}$, più esattamente per fissato $M>1$, poniamo $\frac{q\mathcal{E}}{kR} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6M^2}$ pag 13

$$\Rightarrow \frac{T_\theta}{T_z} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{\frac{q\mathcal{E}}{kR}-1/3}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{1/6M^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}6M^2} = 2M$$

Basta quindi prendere delle oscillazioni piccole attorno a $-\frac{2mg}{k}$ per quanto riguarda il moto verticale e, per quanto concerne il moto orizzontale, con valore massimo di θ abbastanza piccolo che

$$\frac{T_\theta}{T_z} > M,$$

Questo è sicuramente possibile, per il teorema delle piccole oscillazioni, quando

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6M^2}\right)\frac{kR}{q},$$

poiché abbiamo verificato che

$$\lim_{E_\theta \to U(0)^+} \frac{T_\theta}{T_z} = 2M.$$