

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
1 Luglio 2016

Un sistema meccanico è costituito da un disco e un anello, che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale. Il disco e l'anello sono entrambi perfettamente rigidi, di spessore infinitesimo, di massa m , di raggio R e di densità di massa omogenea al loro interno. Il centro C_1 del disco si può muovere lungo l'asse z , ma il dispositivo vincolare è tale che il disco è sempre parallelo al piano (orizzontale) Oxy e non può ruotare attorno all'asse z . Anche l'anello è sottoposto a un vincolo che lo mantiene all'interno dello stesso piano orizzontale dove (istantaneamente) risiede il disco. Inoltre, l'anello rotola all'esterno del disco, in modo tale che ci sia sempre un solo punto di contatto tra il disco e l'anello. Si denoti con C_2 il centro dell'anello e con ϑ l'angolo che la semiretta uscente da C_1 e passante per C_2 descrive rispetto al semipiano Oxz con x positive. Sia Q un punto di massa trascurabile che è "incastonato" nell'anello, il cui moto di rotolamento si espleta in modo tale che le coordinate *orizzontali* di Q sono

$$\begin{cases} x = R[2 \cos \vartheta + \cos(2\vartheta)] \\ y = R[2 \sin \vartheta + \sin(2\vartheta)] \end{cases} ,$$

quando le corrispondenti coordinate *orizzontali* di C_2 sono $x = 2R \cos \vartheta$ e $y = 2R \sin \vartheta$ (in accordo con la definizione dell'angolo ϑ).

Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega l'origine O a Q . Inoltre, il solo punto Q è anche dotato di carica elettrica q , che è soggetta agli effetti di un campo elettrico uniforme di norma uguale a \mathcal{E} , parallelo ed equiverso all'asse x . È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero m , R , g , k , q e \mathcal{E} , abbiano valori reali positivi. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange. Si calcoli la velocità istantanea del punto dell'anello che si trova a contatto con il disco.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3A) Si scrivano le soluzioni esplicite delle equazioni di Lagrange, utilizzando (laddove è strettamente necessario) il "metodo per quadrature".

(3B) Si dimostri che, per ogni fissato valore reale $M > 0$ (da intendersi arbitrariamente grande) e per opportune condizioni che devono essere soddisfatte dai parametri, esistono dei moti tali che

$$\frac{T_\vartheta}{T_z} > M ,$$

dove T_ϑ e T_z sono, rispettivamente, i periodi di *piccole* oscillazioni del moto orizzontale e di quello verticale.