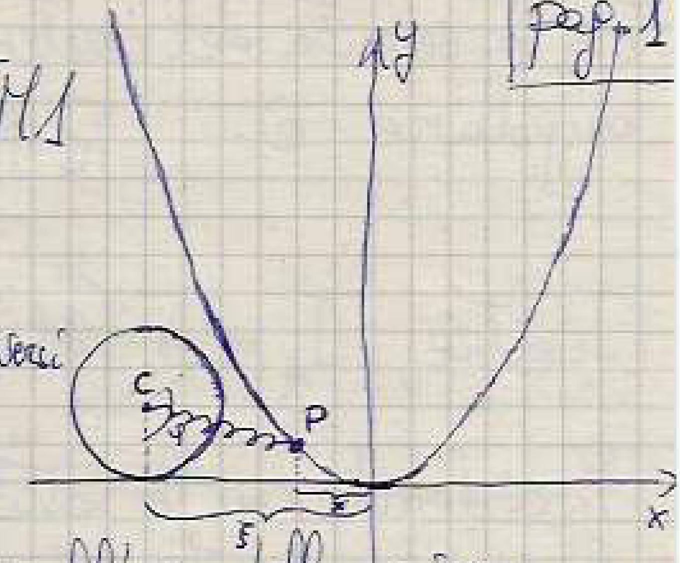
I Appello scritto di FM1
Giugno 2016



massa $P = m$; m vincolato a muoversi su $y = x^2$.

Anello omogeneo (di massa M raggio R e centro C) rotola senza strisciare sull'asse delle ascisse.

Costante molla tra C e $P = k$

---

(1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

Adottiamo, come coordinate libere o lagrangiane, x, ξ come descritte in figura.

Esse sono, rispettivamente, l'ascissa dei punti P e C.

È conveniente scrivere le coordinate di P: (x, x^2) e quelle di C: (ξ, R)

Le corrispondenti velocità sono

$$\underline{v}_P = (\dot{x}, 2x\dot{x}) \qquad \underline{v}_C = (\dot{\xi}, 0)$$

Possiamo quindi scrivere, formalmente, la seguente espressione per l'energia cinetica: $T = \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P + \frac{1}{2} M \underline{v}_C \cdot \underline{v}_C + \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2$, dove $\dot{\varphi}$ è la velocità angolare di rotazione dell'anello.

Come spiegato varie volte (durante le lezioni), la relazione tra la velocità del centro dell'anello e quella angolare è $R\dot{\varphi} = -\dot{\xi}$, poiché l'anello rotola senza strisciare.

Inoltre, $I_A = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R^3 = 2\pi\delta R^3 = \cancel{2\pi} \frac{M}{\cancel{2\pi R}} R^{\cancel{3}\,2} = MR^2$

Procedendo con le sostituzioni possiamo esprimere l'energia cinetica in funz. delle coordinate Lagrangiane e delle velocità generalizzate ad esse associate:

$$T = \frac{1}{2} m(1+4x^2)\dot{x}^2 + M\dot{\xi}^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, cominciamo a scrivere l'espressione seguente:

$$U = mg y_P + Mg y_C + \frac{1}{2} k \overline{PC}^2$$
$$= mgx^2 + MgR + \frac{1}{2} k\left[(x-\xi)^2 + (x^2-R)^2\right]$$
$$= mgx^2 + MgR + \frac{1}{2} k\left(x^2 - 2x\xi + \xi^2 + x^4 - 2Rx^2 + R^4\right),$$

omettendo le costanti additive (che non sono significative) e riordinando i termini, possiamo scrivere

$$U = \frac{1}{2} kx^4 + \left[\frac{1}{2} k(1-2R) + mg\right]x^2 - kx\xi + \frac{1}{2} k\xi^2$$

Riassumendo, la lagrangiana diventa

$$L = T - U = \frac{1}{2} m(1+4x^2)\dot{x}^2 + M\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} kx^4 - \left[\frac{1}{2} k(1-2R) + mg\right]x^2 + kx\xi - \frac{1}{2} k\xi^2 .$$

Le eq. di Lagrange assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = m(1+4x^2)\ddot{x} + 4mx\dot{x}^2 + 2kx^3 \\ \qquad + [k(1-2R)+2mg]x - k\xi = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = 2M\ddot{\xi} + k(\xi - x) = 0 \end{cases}$$

(2) P.ti di equilibrio e stabilità.

Dobbiamo risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2kx^3 + [k(1-2R)+2mg]x - k\xi = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = k(\xi - x) = 0 \implies \xi = x \end{cases}$$

Andando a sostituire $\xi = x$ nella prima eq. otteniamo

$$2kx^3 + [k(\cancel{1}-2R)+2mg]x - \cancel{k}x = 0$$

$$\Rightarrow 2kx\left(x^2 + \frac{mg}{k} - R\right) = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{R - \frac{mg}{k}}, \text{ quando } \frac{mg}{kR} < 1$$

Riassumendo, abbiamo 3 possibili p.ti di equilibrio:

$$(x,\xi) \in \left\{(0,0), \left(\sqrt{R-\frac{mg}{k}}, \sqrt{R-\frac{mg}{k}}\right), \left(-\sqrt{R-\frac{mg}{k}}, -\sqrt{R-\frac{mg}{k}}\right)\right\}$$

dove il secondo e il terzo p.to di equilibrio esistono se e solo se

$\frac{mg}{kR} \leq 1.$

Al fine di studiare la stabilità dei p.ti di equilibrio, cominciamo a calcolare

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} 6kx^2 + k(1-2R) + 2mg & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

Analizziamo i vari casi.

. Caso $(x, \xi) = (0, 0)$

$$\text{Hess } U\Big|_{x=\xi=0} = \begin{pmatrix} k(1-2R) + 2mg & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess } U\Big|_{x=\xi=0} = k^2(\cancel{1}-2R) + 2mgk - \cancel{k^2}$$
$$= 2k(mg - kR)$$

- Quando $\frac{mg}{kR} > 1$, abbiamo $\det > 0$, ~~Tr Hess~~ e $\text{Tr Hess } U = 2(k + mg - kR) > 0$

$\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.to di equilibrio STABILE.

- Se $\frac{mg}{kR} = 1$, $\Rightarrow \det \text{Hess } U = 0$

$\text{Tr Hess } U = 2(k + mg - kR) = 2k > 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo

$\Rightarrow$ è necessario un supplemento di indagine

- Se $\frac{mg}{kR} < 1 \Rightarrow \det \text{Hess } U < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg.

$\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE.

• Casi $(x, \xi) = \left(\pm\sqrt{R - \frac{mg}{k}}, \pm\sqrt{R - \frac{mg}{k}} \right)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{x=\xi=\pm\sqrt{R-\frac{mg}{k}}} = \begin{pmatrix} 6(kR - mg) + k(1-2R) + 2mg & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \mathrm{Hess}\, U \Big|_{x=\xi=\pm\sqrt{R-\frac{mg}{k}}} = 6k(kR - mg) + k^2(\cancel{1}-2R) + 2mgk - \cancel{k^2}$$
$$= 4k(kR - mg)$$

– Se $\frac{mg}{kR} < 1$, allora $\det \mathrm{Hess}\, U > 0$
e $\mathrm{Tr}\, \mathrm{Hess}\, U = 4(kR - mg) + 2k > 2k > 0$

$\Rightarrow$ 2 ~~pti~~ autoval. pos. $\Rightarrow$ p.ti di equilibrio STABILE

– Se $\frac{mg}{kR} = 1$, allora $\det \mathrm{Hess}\, U = 0$
e $\mathrm{Tr}\, \mathrm{Hess}\, U = 4(kR - mg) + 2k = 2k > 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo

$\Rightarrow$ è necessario un supplemento di indagine

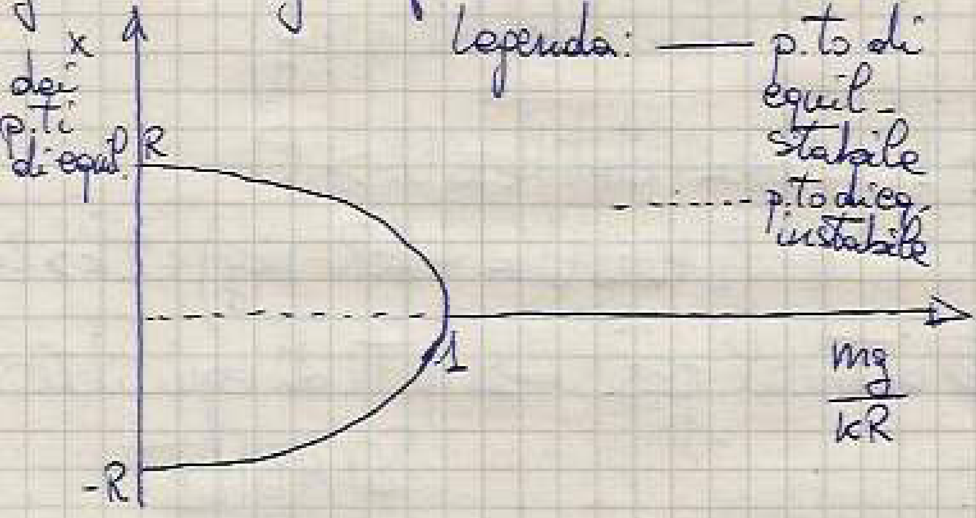
– Se $\frac{mg}{kR} > 1$, allora quei p.ti di equilibrio $\nexists$.

Possiamo riassumere la situazione nella seguente tabella.

x \ $\frac{mg}{kR}$	<1	$=1$	>1
$\{0\}$	INSTAB		STAB.
$\pm\sqrt{R-\frac{mg}{k}}$	STAB.		$\nexists$

Dove i rettangoli "lasciati in bianco" corrispondono ai casi indecisi.

Possiamo riassumere la situazione anche con il seguente grafico.



Nel grafico qui a sinistra abbiamo sfruttato l'osservazione che, quando $\frac{mg}{kR}=1$, $\left(\pm\sqrt{R-\frac{mg}{k}}, \pm\sqrt{R-\frac{mg}{k}}\right)$ coincidono con $(0,0)$.

Dal grafico precedente, riconosciamo che questa è la tipica situazione della biforcazione di un p.to di equilibrio stabile. Siamo quindi portati a congetturare che, per $\frac{mg}{kR}=1$, $(0,0)$ sia un p.to di equilibrio stabile.

Verifichiamo questa congettura.

Osserviamo che quando $mg=kR$, allora il potenziale diventa

$$U = \frac{1}{2}kx^4 + \frac{1}{2}kx^2 + \cancel{(mg-kR)}\,x^2 - kx\xi + \frac{1}{2}k\xi^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[x^4+(x-\xi)^2\right].$$

È allora evidente che $U(x,\xi)>0$ quando $(x,\xi)\neq(0,0)$ e $U(0,0)=0$.

Ne segue che il potenziale U ha un p.to di minimo assoluto in $(0,0)$, che quindi è un p.to di equilibrio STABILE per il th. di Lagrange-Dirichlet.

---

(3) Si studi ora il sistema quando è soggetto a un nuovo vincolo, in modo t.c. C e P abbiano sempre la stessa ascissa.
Inoltre, si consideri il caso particolare in cui $m = k = g = 1$ e $R = 2$.

(3a) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange, usando l'ascissa del p.to C come coordinata libera. Inoltre, si determinino i livelli di energia corrispondenti a p.ti di equilibrio per questo nuovo sistema meccanico a 1 grado di libertà.

(3b) Si aggiunga all'equazione di Lagrange (precedentemente scritta) un termine dissipativo $-\lambda v_c$. Si considerino condizioni iniziali t.c. $x_c(0) = \hat{x}$ e $v_c(0) > 0$ t.c. il livello di energia iniziale è $1 + \hat{E}$ dove $\hat{x}$ è il p.to di equilibrio instabile e $\hat{E}$ è il livello di energia corrispondente alla sol. di quiete $x(t) = \hat{x}$.
Si verifichi che $x_c(t) > 0$ $\forall t > 0$ quando $\lambda = 5$.

(3a) Possiamo facilmente scrivere la nuova lagrangiana $\mathcal{L}$ che ci viene richiesta, ponendo

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = L(x,\dot{x},\xi,\dot{\xi})\Big|_{\substack{\xi=x\\ \dot{\xi}=\dot{x}}} = \frac{1}{2}\left[m(1+4x^2)+M\right]\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^4 - (mg-kR)x^2$$

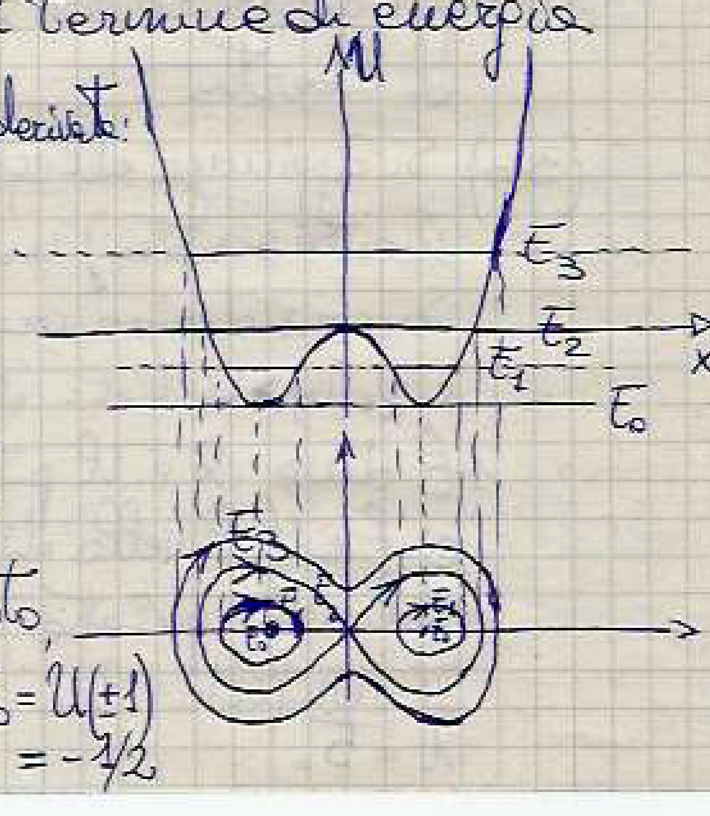
Dopo aver sostituito m, g, k con il valore 1 e R, M con 2, si ottiene $\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}(3+4x^2)\dot{x}^2 - \frac{x^4}{2} + x^2$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (3+4x^2)\ddot{x} + 8x\dot{x}^2 - 4x\dot{x}^2 + 2x^3 - 2x$$
$$= (3+4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + 2x(x^2-1) = 0$$

La conservazione dell'energia per questo problema a 1 grado di libertà, si esprime come segue:

$$\frac{1}{2}(3+4x^2)\dot{x}^2 + \frac{x^4}{2} - x^2 = E,$$

dove $U(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$ è il termine di energia potenziale. Calcoliamo la derivata:



$$U'(x) = 2x(x^2-1)$$

$\rightarrow U'(x) > 0$ per $x \in (-1,0)$ e $x > 1$,

mentre $U'(x) < 0$ per $x \in (0,1)$ e $x < -1$

Dall'analisi qualitativa del moto, segue che il livello di energia $E_0 = U(\pm 1) = -1/2$

è quello corrispondente ai due p.ti di equilibrio stabile $x(t) = \pm 1$; inoltre, $E_2 = U(0) = 0$ è il livello di energia corrispondente al p.to di equilibrio instabile $x(t) = 0$.

(3b) Le condizioni iniziali sono dunque

$$x(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0 \ \text{t.c.} \ \frac{3}{2} v_0^2 = 1$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

Le eq. del moto possono essere riscritte come segue:

$$(3 + 4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + 2x(x^2 - 1) = -\lambda \dot{x}$$

Osserviamo che

$$\dot{\mathcal{E}} = \left[(3 + 4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 + 2x(x^2 - 1)\right]\dot{x} = -\lambda \dot{x}^2$$

dove $\mathcal{E}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(3 + 4x^2)\dot{x}^2 + \frac{x^4}{2} - x^2$ è l'energia corrispondente all'approssimazione conservativa del problema a 1 grado di libertà.

Per verificare che $\forall t > 0$, $x(t) > 0$, procediamo per assurdo, cioè assumiamo che

(A) $\exists \ t^* > 0$ t.c. $x(t^*) = 0$

(B) $\Rightarrow \exists \ \bar{t} \in (0, t^*)$ t.c. $\dot{x}(\bar{t}) = 0$ e $x(\bar{t}) \geq \sqrt{2}$ (poiché $U(\pm\sqrt{2}) = 0$).

(C) $\Rightarrow -\int_0^{t^*} dt \ \dot{\mathcal{E}} \leq 1$. $\Rightarrow$ (D) $\mathcal{E}(x(t), \dot{x}(t)) \geq 0 \ \forall t \in [0, t^*]$

Vogliamo dimostrare che (A), (B) e (D) implicano che (C) è assurda.

A tale scopo, ~~[illegible]~~ ricordiamo che

$$\left|\int_0^{t^*} dt\, \dot{\mathcal{E}}\right| = \lambda \int_0^{t^*} dt\, \dot{x}^2 = \lambda \int_0^{x(\bar{t})} dx \sqrt{\frac{2}{\mu(x)}\left(\mathcal{E}(x,\dot{x}) - \mathcal{U}(x)\right)}$$

$$- \int_{x(\bar{t})}^{0} dx \sqrt{\frac{2}{\mu(x)}\left(\mathcal{E}(x,\dot{x}) - \mathcal{U}(x)\right)} \text{ , dove } \mu(x) = 3 + 4x^2$$

e il secondo integrale (quello col segno - davanti) è diverso dal primo perché lungo il ritorno il moto $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ è diverso da quello durante l'andata da 0 a $x(\bar{t})$.

Possiamo allora scrivere la seguente catena di disuguaglianze:

$$\left|\int_0^{t^*} dt\, \dot{\mathcal{E}}\right| \geq 2\lambda \int_0^{\sqrt{2}} dx \sqrt{\frac{2}{\mu(x)}\left(-\mathcal{U}(x)\right)} \text{ , dove abbiamo usato (B) e (D),}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{11}} \int_0^{\sqrt{2}} dx \sqrt{-\mathcal{U}(x)} \text{ , dove abbiamo usato che } \mu(x) \leq \sqrt{11} \text{ per } x \in [0, \sqrt{2}],$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\lambda \int_0^{\sqrt{2}} dx \sqrt{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\lambda \int_0^{\sqrt{2}} dx\, x \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\lambda \left[\int_0^1 dx \frac{x}{\sqrt{2}} + \int_1^{\sqrt{2}} dx \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\lambda \left[\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\Big|_0^1 + \int_{\pi/4}^{\pi/2} du \left(\sqrt{2}\cos u \sqrt{1 - \sin^2 u}\right)\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\lambda \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} du \left(\cos 2u + 1\right)\right]$$

$$= \frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{11}}\lambda \left[\frac{1}{2\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(\frac{\sin(2u)}{2}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\lambda}{\sqrt{11}}\left[\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\pi}{2}\right]$$

Dopo aver posto $\lambda = 5$, possiamo quindi concludere che

$$\left| \int_0^{t^*} dt\, \dot{\mathcal{E}} \right| \geq \frac{5}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\pi}{2} > 2 ,$$

ciò contraddice palesemente l'affermazione (C) che segue dall'ipotesi di assurdo.

Siccome siamo giunti all'assurdo, è vero ciò che avevamo precedentemente negato, cioè

$$\forall\, t > 0 \quad x(t) > 0 .$$