Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
8 Giugno 2016

Un sistema meccanico è costituito da un anello rigido e un punto materiale P, che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $0xy$, con asse delle y verticale. L'anello è di spessore infinitesimo, di raggio R, di massa M e ha densità di massa omogenea al suo interno. Esso rotola senza strisciare sull'asse delle ascisse. Il punto P ha massa m ed è vincolato a scorrere sulla parabola caratterizzata dall'equazione $y = x^2$. Una molla ideale, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P al centro C dell'anello.
I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il suo moto, l'anello può attraversare il punto P e la guida parabolica (a cui P stesso è vincolato) senza scontrarsi con essi. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

(1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.

(2) Si deteminino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.

(3) Si supponga ora che il sistema meccanico sia sottoposto a un ulteriore vincolo, realizzato in modo tale che il punto P abbia sempre la stessa ascissa rispetto al centro C dell'anello. Per semplicità, ci si limiti a considerare il caso in cui i valori dei parametri sono fissati come segue: $m = g = k = 1$ e $M = R = 2$.

  (3A) Si riscrivano, per questo nuovo sistema meccanico, la lagrangiana e le equazioni di Lagrange, utilizzando l'ascissa x (che è comune ai punti P e C) come coordinata libera. Inoltre, si determinino esplicitamente i livelli di energia che corrispondono ai punti di equilibrio per questo nuovo sistema meccanico a un grado di libertà.

  (3B) Al membro di destra dell'equazione di Lagrange, precedentemente richiesta al punto (3A), si aggiunga un termine dissipativo $-\lambda\dot{x}$ che tende a frenare il rotolamento dell'anello. Si considerino le condizioni iniziali di posizione $x(0) = \hat{x}$ e di velocità $\dot{x}(0) > 0$ tale che il valore dell'energia al tempo $t = 0$ è $\hat{E} + 1$, dove $\hat{x}$ è il punto di equilibrio instabile e $\hat{E}$ è il corrispondente livello dell'energia, che è uno fra quelli richiesti al punto (3A). Si verifichi che la soluzione dell'equazione (dissipativa) del moto, che fa seguito alle suddette condizioni iniziali, è tale che $x(t) > 0 \;\forall\; t > 0$, quando $\lambda = 5$.