

Esame scritto di FMI
Gennaio 2017

pag. 1

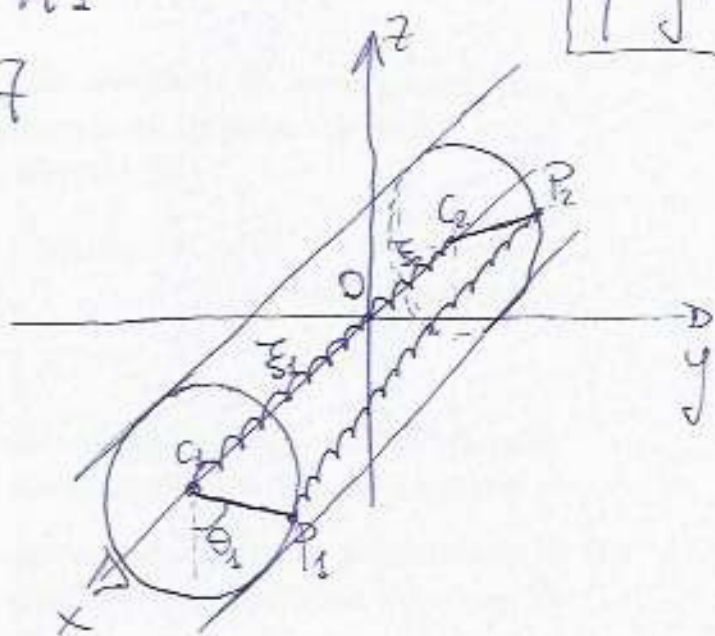
C_1, P_1 e C_2, P_2 vertici di 2
aste omogenee di massa m

$$\overline{C_1 P_1} = \overline{C_2 P_2} = R$$

$C_1, C_2 \in$ asse x ; $\overrightarrow{C_1 P_1} \perp \underline{e}_x$

$\overrightarrow{C_2 P_2} \perp \underline{e}_x$ ($\underline{e}_x$ versore asse x)

Molle tra O e C_1 , O e C_2 , P_1 e P_2 di costante elastica $= k$



(1) Si scrivano la lagrangiana e le eq. di lagrange

Assumiamo come coordinate libere o lagrangiane
 $\xi_1, \xi_2, \theta_1, \theta_2$

dove ξ_1, ξ_2 sono rispettivamente le coordinate (sull'asse x) che identificano la posizione di C_1 e C_2 , mentre θ_1 e θ_2 sono gli angoli formati, rispettivamente da $\overrightarrow{C_1 P_1}$ e $\overrightarrow{C_2 P_2}$ con la verticale discendente ~~passante per~~ ^{uscite da} C_1 e C_2 .
Conseguentemente, si ha che

$$\text{Coordinate di } P_1: \begin{cases} x = \xi_1 \\ y = R \sin \theta_1 \\ z = -R \cos \theta_1 \end{cases}$$

$$\text{Coordinate di } P_2: \begin{cases} x = \xi_2 \\ y = R \sin \theta_2 \\ z = -R \cos \theta_2 \end{cases}$$

Inoltre, ovviamente, le coordinate di pag. 2
 C_1 e C_2 sono, rispettivamente, $(\xi_1, 0, 0)$ e $(\xi_2, 0, 0)$.

Al fine di calcolare l'energia cinetica di ciascuna delle 2 aste, è conveniente scrivere la velocità di un generico punto A appartenente all'asta di vertici C_1, P_1 e posto a distanza ρ da C_1 :

$$\underline{V}_A = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \rho \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \rho \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix}. \quad \text{Di conseguenza, si ha che}$$
$$\underline{V}_A \cdot \underline{V}_A = \dot{\xi}_1^2 + \rho^2 \dot{\theta}_1^2$$

L'energia cinetica della prima asta sarà quindi:

$$T_{C_1 P_1} = \frac{1}{2} \int_0^R d\rho \frac{m}{R} \left(\dot{\xi}_1^2 + \rho^2 \dot{\theta}_1^2 \right) = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{3} \dot{\theta}_1^2.$$

In altri termini, siccome il moto di rotazione attorno a C_1 si svolge in un piano ortogonale alla direzione del moto di traslazione (che è uguale per tutti i punti dell'asta), allora l'energia cinetica è formata da due contributi disaccoppiati: quello "traslatorio", ovvero $\frac{1}{2} m \dot{\xi}_1^2$, e quello rotatorio, cioè $\frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2$ dove $I = \frac{m R^2}{3}$ è proprio il momento d'inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza R rispetto alle rotazioni nel piano attorno a uno dei suoi vertici.

Procedendo in modo analogo, si ottiene l'energia

cinetica della seconda asta, cioè

$$T_{C_2 P_2} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{3} \dot{\theta}_2^2.$$

pag. 3

L'energia cinetica totale del sistema, sarà quindi

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{3} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2).$$

Al fine di calcolare l'energia potenziale totale del sistema è conveniente ~~prima~~ scriverla, preliminarmente, nella seguente forma

$$U = \frac{1}{2} k \overline{OC}_1^2 + \frac{1}{2} k \overline{OC}_2^2 + \frac{1}{2} k \overline{P_1 P_2}^2 + m g z_{B_1} + m g z_{B_2},$$

dove, B_1 e B_2 sono i baricentri delle due aste.
Dall'espressione delle coordinate di C_1 e C_2 , segue immediatamente che

$$\overline{OC}_1^2 = \xi_1^2, \quad \overline{OC}_2^2 = \xi_2^2.$$

E' utile calcolare separatamente

$$\begin{aligned} \overline{P_1 P_2}^2 &= (\xi_1 - \xi_2)^2 + R^2 \left[(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 + (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 \right] = \\ &= (\xi_1 - \xi_2)^2 + R^2 [2 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Possiamo quindi riscrivere l'energia potenziale come funzione delle coordinate lagrangiane, cioè

$$U = \frac{1}{2} k [\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1 - \xi_2)^2] - k R^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{m g R}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

dove è stata omessa la costante additiva | pag. 4
 kR^2 , perché non è significativa.

Siamo finalmente in grado di scrivere la lagrangiana del sistema, cioè

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{3} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2} k [\xi_1^2 + \xi_2^2 + (\xi_1 - \xi_2)^2] + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{mgR}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

Le eq. di Lagrange saranno quindi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \xi_1} = m \ddot{\xi}_1 + k(2\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = m \ddot{\xi}_2 + k(2\xi_2 - \xi_1) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{mR^2}{3} \ddot{\theta}_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{mgR}{2} \sin \theta_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{mR^2}{3} \ddot{\theta}_2 + kR^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{mgR}{2} \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

(2) Limitatamente ai dati che fanno seguito a condizioni iniziali tali che ~~le coordinate~~ i punti C_1 e C_2 si trovano nel piano Oyz al tempo $t=0$ con velocità nulla (e, quindi, $\forall t \in \mathbb{R}$ P_1 e $P_2 \in$ al piano Oyz), si determini

no tutte le posizioni di equilibrio e se ne
studia la stabilità in condizioni di "molla forte", ovvero
quando i parametri sono tali che $kR \gg mg$. pag. 5

Quando le condizioni iniziali sono quelle descritte
dal testo, si ha che

$$\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0.$$

Siccome le eq. di Lagrange sono evidentemente
separabili a coppie, se ne deduce immediatamen-
te che l'unica soluzione del problema di Cauchy
che include le prime due eq. di Lagrange e le
condizioni iniziali è

$$\xi_1(t) = \xi_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

in accordo con quanto scritto nel testo, ovvero
il moto che fa seguito a quelle condizioni iniziali
si svolge nel piano Oyz .

Per poter studiare i moti rotatori delle aste nel piano
 Oyz è conveniente riferirsi alla nuova Lagrangiana

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) &= L(\underline{\xi}, \underline{\theta}, \dot{\underline{\xi}}, \dot{\underline{\theta}}) \Big|_{\underline{\xi}=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{mR^2}{3} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + kR^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m g R}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \end{aligned}$$

Per determinare le soluzioni di equilibrio, studiamo i p.t. stazionari del nuovo potenziale

pag. 6

$$U(\theta_1, \theta_2) = U(\underline{\xi}, \underline{\theta}) \Big|_{\underline{\xi}=\underline{0}} = -kR^2 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) - \frac{mgR}{2} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Cerchiamo quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = kR^2 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{mgR}{2} \sin\theta_1 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = kR^2 \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) + \frac{mgR}{2} \sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = kR^2 \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{mgR}{2} \sin\theta_1 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = kR^2 \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) + \frac{mgR}{2} \sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due eq. si ottiene

$$\frac{mgR}{2} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta_1 = -\sin\theta_2 \Rightarrow \theta_1 = -\theta_2 \text{ oppure } \theta_1 = \theta_2 + \pi$$

Sostituiamo $\theta_2 = -\theta_1$ nella prima eq. e otteniamo

$$kR^2 \sin(2\theta_1) + \frac{mgR}{2} \sin\theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow 2kR^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1 + \frac{mgR}{2} \sin\theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{R}{2} \sin\theta_1 (4kR \cos\theta_1 + mg) = 0$$

$$\sin\theta_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_1 = 0, \pi$$

$$\cos\theta_1 = -\frac{mg}{4kR}, \text{ risolvibile quando } \left| \frac{mg}{4kR} \right| \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_1 = \pm \beta, \text{ dove } \beta = \arccos\left(-\frac{mg}{4kR}\right)$$

Poniamo
~~Sostituendo~~ ora $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi$ nella
prima eq., allora si ha che

pag. 7

$$kR^2 \sin \pi + \frac{mgR}{2\vartheta} \sin \vartheta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin \vartheta_1 = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = 0, \pi.$$

Riassumendo, abbiamo le seguenti configurazioni
di equilibrio:

$$(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \{(0,0), (\pi,\pi), (0,\pi), (\pi,0), (\pm\beta, \mp\beta)\},$$

dove l'ultima coppia di soluzioni di quiete esiste
se e solo se $\frac{mg}{2kR} \leq 1$.

Allo scopo di discutere la stabilità dei suddetti
punti di equilibrio, calcoliamo

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} kR^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{mgR}{2\vartheta} \cos \vartheta_1 & -kR^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ -kR^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) & kR^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{mgR}{2\vartheta} \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}$$

Passiamo a studiare separatamente i vari casi
particolari.

- Caso $(\vartheta_1, \vartheta_2) = (0,0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\vartheta_1=0 \\ \vartheta_2=0}} = \begin{pmatrix} kR^2 + \frac{mgR}{2\vartheta} & -kR^2 \\ -kR^2 & kR^2 + \frac{mgR}{2\vartheta} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

pag. 8

$$\det(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0}}) = \left(kR^2 + \frac{mgR}{2\sigma}\right)^2 - k^2 R^4 \\ = \frac{mgR^2}{4} (4kR + mg) > 0$$

$$\text{e } T_2(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=0}}) = 2R \left(kR + \frac{mg}{2\sigma}\right) > 0,$$

quindi abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow (0,0)$ è STABILE.

- Caso (π, π)

$$\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pi \\ \theta_2=\pi}} = \begin{pmatrix} kR^2 - \frac{mgR}{2\sigma} & -kR^2 \\ -kR^2 & kR^2 - \frac{mgR}{2\sigma} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

$$\det(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pi \\ \theta_2=\pi}}) = \left(kR^2 - \frac{mgR}{2\sigma}\right)^2 - k^2 R^4 \\ = \frac{mgR^2}{4} (-4kR + mg) < 0,$$

poiché $kR > mg$; inoltre,

$$T_2(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pi \\ \theta_2=\pi}}) = 2R \left(kR - \frac{mg}{2\sigma}\right) > 0.$$

Abbiamo quindi 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow (\pi, \pi)$ è INSTABILE.

- Caso $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0)$

$$\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pi \\ \theta_2=0}} = \begin{pmatrix} -kR^2 - \frac{mgR}{2\sigma} & kR^2 \\ kR^2 & -kR^2 + \frac{mgR}{2\sigma} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che

pag. 9

$$\det(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pi \\ \theta_2=0}}) = \cancel{k^2 R^4} - \frac{m g^2 R^2}{4} - \cancel{k^2 R^4} < 0$$

$$\text{e } T_2(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pi \\ \theta_2=0}}) = -2 k R^2 < 0,$$

abbiamo quindi 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow (\pi, 0)$ è INSTABILE.

- Caso $(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi)$

Questo caso è analogo al precedente. Infatti,

$$\det(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=0 \\ \theta_2=\pi}}) = \det \begin{pmatrix} -kR^2 + \frac{mgR}{2} & kR^2 \\ +kR^2 & -kR^2 - \frac{mgR}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{k^2 R^4} - \frac{m g^2 R^2}{4} - \cancel{k^2 R^4} < 0$$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\Rightarrow (0, \pi)$ è INSTABILE.

- Casi $(\theta_1, \theta_2) = (\pm \beta, \mp \beta)$, questi p.t. di equil. $\exists$ perché $\frac{mg}{kR} \leq 1 < 2$.

$$\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pm\beta \\ \theta_2=\mp\beta}} = \begin{pmatrix} kR^2 \cos 2\beta + \frac{mgR \cos \beta}{2} & -kR^2 \cos 2\beta \\ -kR^2 \cos 2\beta & kR^2 \cos 2\beta + \frac{mgR \cos \beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\text{Hess } U|_{\substack{\theta_1=\pm\beta \\ \theta_2=\mp\beta}}) = \left(kR^2 \cos 2\beta + \frac{mgR \cos \beta}{2}\right)^2 - k^2 R^4 \cos^2 2\beta$$

$$= \cancel{2kR} \frac{mgR \cos \beta}{2} \left(2kR \cos 2\beta + mgR \cos \beta\right)$$

$$= -\frac{m^2 g^2 R}{16kR} \left(\cancel{\frac{2}{4}kR} \cancel{\frac{2m^2 g^2}{16kR^2}} - \frac{2m^2 g^2}{16kR^2} - \frac{2kR}{4} \frac{mgR}{2kR} \right)$$

$$= -\frac{m^2 g^2}{16k} \left(\frac{m^2 g^2}{2kR} - 2kR - \frac{m^2 g^2}{4kR} \right)$$

pag. 10

$$= -\frac{m^2 g^2 R}{4} \left(\frac{m^2 g^2}{16k^2 R^2} - 1 \right) > 0,$$

dove abbiamo rimpiazzato $\cos \beta$ con $-\frac{mg}{4kR}$ e
abbiamo sfruttato la condizione $\frac{mg}{kR} \leq 1$.

Inoltre, abbiamo che

$$T_2 \left(\text{Hess } U \right)_{\substack{\theta_1 = \pm \beta \\ \theta_2 = \mp \beta}} = 2 \left(2kR^2 \cos^2 \beta - kR^2 + \frac{mgR \cos \beta}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cancel{2kR^2} \frac{m^2 g^2}{16k^2 R^2} - kR^2 - \frac{m^2 g^2 R}{8kR} \right) = -2kR^2 < 0$$

Abbiamo quindi 2 autoval. neg. $\Rightarrow (\pm \beta, \mp \beta)$ sono
p.t. di equilibrio instabili.

(3A) Si considerino ora condizioni iniziali tali
che al tempo $t=0$ le 2 aste giacciono entrambe
nel piano Oyz in posizione speculare rispetto all'asse
 z e la velocità (al tempo $t=0$) dei p.t. P_1 e P_2 è oriz.

zonale. Si risolve per quadrature
l'intero sistema delle eq. di Lagrange

pag. 11

Come già osservato in precedenza, sappiamo che
le 4 eq. di Lagrange sono separabili a coppie.
È conveniente risolvere separatamente le 2 coppie
di equazioni. Consideriamo la prima coppia
di eq. cioè

$$\begin{cases} m \ddot{\xi}_1 + k(2\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ m \ddot{\xi}_2 + k(2\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

In questo caso, è conveniente ricondursi alle equazioni
per il baricentro

$$X_B = \xi_1 + \xi_2$$

e per la distanza mutua $z = \xi_2 - \xi_1$.

Sommando e sottraendo membro a membro le
2 equazioni differenziali, otteniamo

$$\begin{cases} m(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) + k(\xi_1 + \xi_2) = 0 \\ m(\ddot{\xi}_2 - \ddot{\xi}_1) + 3k(\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{X}_B + kX_B = 0 \\ m\ddot{z} + 3kz = 0 \end{cases}$$

Il ^{sotto}sistema di 2 eq. di Lagrange si separa in 2 eq.
dell'oscillatore armonico, che sono separate e

facilmente risolvibili.

pag. 12

Infatti,

$$X_B(t) = A_B \cos(\omega_B t + \varphi_B),$$

dove $\omega_B = \sqrt{\frac{k}{m}}$, mentre A_B e φ_B sono determinati in modo tale da accordarsi con le condizioni iniziali.

In particolare, siccome $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 0 \Rightarrow X_B(0) = 0$
 $\Rightarrow \varphi_B = \pm \pi/2$. Inoltre, posto $\dot{X}_B(0) = \frac{\dot{\xi}_1(0) + \dot{\xi}_2(0)}{2}$,
abbiamo che $\dot{X}_B(t) = -\omega_B A_B \sin(\omega_B t + \varphi_B)$
 $\Rightarrow A_B = \frac{|\dot{X}_B(0)|}{\omega_B}$.

Inoltre, abbiamo che

$$z(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

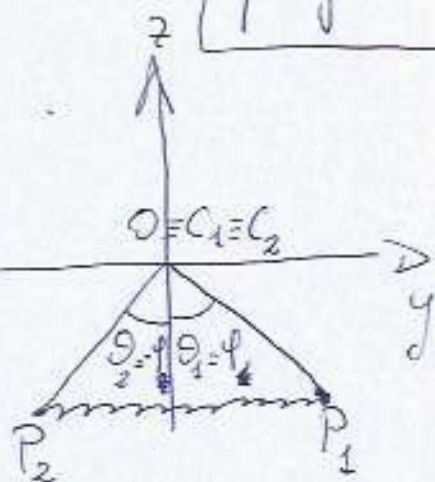
dove $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, e, anche in questo caso, A_2 e φ_2

sono da determinare in accordo alle condizioni iniziali.

In particolare, se si considera il (semplice) caso in cui anche $\dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0)$, allora $\dot{z}(0) = 0$ (oltre che $z(0) = 0$) $\Rightarrow A_2 = 0 \Rightarrow z(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$,
cioè $\xi_1(t) = \xi_2(t) \forall t \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora risolvere la
seconda coppia di equazioni
di Lagrange, cioè

$$(\star) \begin{cases} \frac{mR^2}{3} \ddot{\theta}_1 + kR^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{mgR}{2} \sin \theta_1 = 0 \\ \frac{mR^2}{3} \ddot{\theta}_2 + kR^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{mgR}{2} \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$



In questo caso, giocando un ruolo essenziale (allo scopo di risolvere le eq.) le condizioni iniziali, che sono

$$(\star) \begin{cases} \theta_1(0) = -\theta_2(0) \\ \dot{\theta}_1(0) = -\dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}, \text{ come si può comprendere anche dal grafico al tempo } t=0, \text{ riportato qui sopra.}$$

È abbastanza intuitivo che (essendo le aste uguali e sottoposte alle stesse forze) la situazione "simmetria speculare" rispetto al piano Oxz ~~non~~ persista a tutti i tempi. Per provarlo, dimostriamo che esistono soluzioni del problema di Cauchy del tipo

$$t \mapsto (\theta_1(t), \theta_2(t)) = (\varphi(t), -\varphi(t)).$$

Infatti, ponendo $\varphi(t) = \theta_1(t)$ e $\theta_2(t) = -\varphi(t)$, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{mR^2}{3} \ddot{\varphi} + kR^2 \sin(2\varphi) + \frac{mgR}{2} \sin \varphi = 0 & \varphi(0) = \theta_1(0) = -\theta_2(0) \\ -\frac{mR^2}{3} \ddot{\varphi} - kR^2 \sin(2\varphi) - \frac{mgR}{2} \sin \varphi = 0 & \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che le 2 eq. di Laprange preservano la simmetria, perché diventano equivalenti. Siamo quindi ricondotti al seguente problema di Cauchy

pag. 14

$$\begin{cases} \frac{mR^2}{3} \ddot{\varphi} + kR^2 \sin(2\varphi) + \frac{m_p R}{2} \sin \varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

Siccome l'eq. diff. del secondo ordine (che compare in quest'ultimo problema di Cauchy) può essere posta in forma normale e il secondo membro è una funzione C^1 di φ (addirittura è C^∞), allora $\exists$ la soluzione $t \mapsto \varphi(t)$ di quest'ultimo problema di Cauchy.

Grazie a quanto affermato nella discussione precedente, segue che $t \mapsto (\vartheta_1(t) = \varphi(t), \vartheta_2(t) = -\varphi(t))$ è soluzione del problema di Cauchy formato dalle equazioni $(\star)$ e $(\star)$. Siccome anche il problema di Cauchy formato da $(\star)$ e $(\star)$ contiene eq. diff. (riportate in $(\star)$) che ~~sono~~ possono essere messe in forma normale e sono regolari, allora

$$t \mapsto (\vartheta_1(t) = \varphi(t), \vartheta_2(t) = -\varphi(t))$$

è l'unica soluzione di quel problema di Cauchy (per cui, appunto, vale l'! delle soluzioni).

Adesso che ci siamo ricondotti al problema di Cauchy

pag. 15

$$\begin{cases} \frac{mR^2}{3} \ddot{\varphi} + kR^2 \sin(2\varphi) + \frac{mgR}{2} \sin \varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

è conveniente risolverlo con il formalismo lagrangiano. Sia

$$\tilde{\mathcal{L}}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{mR^2}{6} \dot{\varphi}^2 - \tilde{U}(\varphi),$$

$$\text{dove } \tilde{U}(\varphi) = -\frac{kR^2}{2} \cos(2\varphi) - \frac{mgR}{2} \cos \varphi,$$

allora, abbiamo che il nostro problema può essere riscritto come segue

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La cui soluzione per quadrature} \\ \text{'è ben nota:} \end{array}$$

$$t - t_0 = t = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{6}{mR^2} (\tilde{E} - \tilde{U}(\varphi))}},$$

dove il livello di energia $\tilde{E}$ è fissato dalle condizioni iniziali, cioè $\tilde{E} = \tilde{U}(\varphi_0)$.

(3B) Denotiamo con T_B e T_{yz} , rispettivamente il periodo del moto del baricentro e quello del moto rotatorio delle aste proiettato sul piano Oyz . Si verifichi che, sotto opportune

Condizioni, che devono essere adeguatamente descritte, ~~esistono~~ $\forall \varepsilon > 0$ esistono (piccole) oscillazioni tali per cui

$$\frac{T_B}{T_{y2}} < \varepsilon$$

Andiamo a determinare i p.ti di equilibrio del moto delle aste, attorno ai quali studieremo le piccole oscillazioni:

$$\frac{d\tilde{U}}{d\varphi} = 0 \Rightarrow 2kR^2 \sin\varphi \cos\varphi + \frac{mgR}{2} \sin\varphi = 0$$

$$\Rightarrow R \sin\varphi \left(2kR \cos\varphi + \frac{mg}{2} \right) = 0$$

$$\varphi = 0, \pi$$

$$\varphi = \pm \beta \text{ con } \beta = \arccos\left(-\frac{mg}{4kR}\right)$$

quando $\frac{mg}{4kR} \leq 1$.

Per vedere se i p.ti di equilibrio sono stabili oppure no, studiamo il segno di $\frac{d^2\tilde{U}}{d\varphi^2} = 2kR^2 \cos 2\varphi + \frac{mgR}{2} \cos\varphi$.

Quando $\varphi = 0$, $\frac{d^2\tilde{U}}{d\varphi^2}(0) = 2kR^2 + \frac{mgR}{2} > 0$, STABILE

Quando $\varphi = \pi$, $\frac{d^2\tilde{U}}{d\varphi^2}(0) = 2kR^2 - \frac{mgR}{2}$

$\Rightarrow$ Se $\frac{mg}{4kR} < 1$, π è STABILE, se $\frac{mg}{4kR} > 1$, π è INSTABILE

Caso $\varphi = \pm \beta$, abbiamo che

pag. 17

$$\left. \frac{d^2 \tilde{U}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi = \pm \beta} = 2kR^2(2\cos^2\beta - 1) + \frac{m g R}{2} \cos\beta$$

$$= 2kR^2 \left(\frac{m^2 g^2}{8k^2 R^2} - 1 \right) - \frac{m^2 g^2}{8k}$$

$$= 2kR^2 \left(\frac{m^2 g^2}{8k^2 R^2} - 1 \right) < 0 \text{ quando } \frac{m g}{4kR} < 1,$$

Cioè nel caso generico per cui si ha l'esistenza dei p.ti di equilibrio $\varphi = \pm \beta$ essi sono INSTABILI.

Trascuriamo lo studio del caso critico $\frac{m g}{4kR} = 1$, che non ci serve per risolvere l'esercizio.

Passiamo al calcolo dei periodi.

Per quanto riguarda ~~di~~ quello di oscillazione del baricentro, per quanto mostrato nel punto (3A), abbiamo sempre che

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Nel ~~caso~~ ^{limite} di piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio $\varphi(t) = 0$, abbiamo che

$$T_{x/2} = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2/3}{\tilde{U}''(0)}} = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2/3}{2kR^2 + \frac{m g R}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{6k + 3g/R}{mR^2/3}}}$$

per le piccole oscillazioni attorno
al punto di equilibrio che è sempre
stabile (cioè $\varphi(t) = 0$), abbiamo quindi che

pag. 18

$$\frac{T_B}{T_{y2}} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}{2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2R}}}} = \sqrt{\left(6 \frac{k}{m} + \frac{3g}{2R}\right) \cdot \frac{m}{k}}$$

$$= \sqrt{6 + \frac{3mg}{2kR}} > \sqrt{6},$$

Siccome questo rapporto non può diventare
piccolo a piacere, non è questo il caso che
ci interessa.

Consideriamo allora l'altro punto di equilibrio
che è (occasionalmente) stabile.

Nel limite di piccole oscillazioni attorno al punto
di equilibrio $\varphi(t) = \pi$, abbiamo che

$$T_{y2} = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2/3}{\tilde{U}''(\pi)}} = 2\pi \sqrt{\frac{mR^2/3}{2kR^2 - \frac{mgR}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2R}}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_B}{T_{y2}} = \sqrt{\left(6 \frac{k}{m} - \frac{3g}{2R}\right) \cdot \frac{m}{k}} = \sqrt{6 - \frac{3mg}{2kR}} = \sqrt{6} \sqrt{1 - \frac{mg}{2kR}}$$

Quando $\frac{mg}{2kR} \rightarrow 1 - \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}$, $\frac{T_B}{T_{y2}} \sim \frac{\epsilon}{2}$, quindi, per $\frac{mg}{2kR}$ poco superiore a 1, $\frac{T_B}{T_{y2}}$ è piccolo
a piacere!