

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
16 Gennaio 2017

Un sistema meccanico è costituito da due aste rigide e omogenee, entrambe di massa m e lunghezza R , le quali si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale. Si denotino, rispettivamente, con C_1 , P_1 e C_2 , P_2 i vertici delle due aste. Ciascuna delle aste ha un suo vertice (rispettivamente, C_1 per la prima e C_2 nel caso della seconda) vincolato a scorrere sull'asse delle x . Entrambe le aste possono ruotare attorno a C_1 o a C_2 , in modo tale da mantenersi sempre in posizione ortogonale rispetto all'asse delle x . Nel sistema meccanico sono poste tre molle ideali, tutte di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. La prima molla collega l'origine O a C_1 , la seconda O a C_2 , mentre la terza collega gli altri vertici delle due molle, cioè P_1 con P_2 . Si supponga che i vincoli siano ideali e siano realizzati in modo tale che le aste si possano attraversare l'una con l'altra senza scontrarsi; si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la Lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si considerino le sole condizioni iniziali tali che all'istante di tempo $t = 0$, i punti C_1 e C_2 si trovano nell'origine con velocità nulla. Si verifichi che l'evoluzione del sistema, che fa seguito alle suddette condizioni iniziali, ammette unicamente dei moti per cui le aste giacciono nel piano $Oyz \forall t$. Limitatamente alla riduzione del sistema meccanico al piano Oyz e al caso in cui i valori dei parametri sono tali che $m = R = k = g = 1$, si determinino tutte le configurazioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
- (3) Si riconsideri il sistema meccanico in tutta la sua generalità, cioè senza assumere che i valori parametri siano fissati in qualche modo. Siano ora le condizioni iniziali tali che, al tempo $t = 0$, i punti P_1 e P_2 appartengano al piano Oyz e si trovino in posizione speculare rispetto all'asse delle z ; inoltre, la velocità iniziale sia la stessa per i punti P_1 e P_2 e sia puramente orizzontale. Si risolva l'intero sistema delle equazioni di Lagrange, applicando il "metodo per quadrature" laddove è necessario.