$$\ddot{x} = -U' - \lambda \dot{x}$$

con $x \in \mathbb{T}$, $\lambda \geq 0$ e

$$U(x) = -a\cos x + \cos^3 x$$

essendo $a > 1$.

I esonero 2015

Traccia della soluzione

(1) Nel caso conservativo ($\lambda = 0$), si determinino le condizioni iniziali (x_0, v_0) cui fanno seguito dei moti non periodici.

E' facile e conveniente determinare gli zeri del potenziale, cioè

$$U(x) = \cos x\,(-a + \cos^2 x) = 0$$

$$\text{per } x = \pm \pi/2,\ \underbrace{\pm \arccos\sqrt{a},\ \pm\arccos\left(-\sqrt{a}\right)}_{\text{dove queste ultime 2 coppie di zeri esistono sse } a \leq 1.}$$

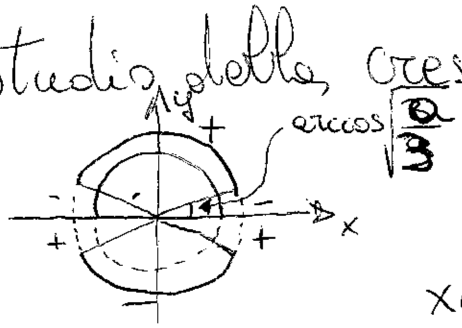
Calcoliamo la derivata

$$U'(x) = a\sin x - 3\sin x\cos^2 x = \sin x\,(a - 3\cos^2 x)$$

I p.ti stazionari saranno quindi t.c.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi \qquad \cos x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{per } a \leq 3 \\ x = \pm\arccos\sqrt{\frac{a}{3}} \\ \quad \pm\arccos\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\end{array}}$$

Studio della crescenza / decrescenza di U:



$\boxed{\text{Caso } a < 3}$

$U'(x) > 0$ per

$$x \in \left(\arccos\sqrt{\frac{a}{3}},\ \arccos\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\right),$$

$$x \in \left(-\pi, -\arccos\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\right),\ x \in \left(-\arccos\sqrt{\frac{a}{3}}, 0\right)$$

Invece $U'(x)<0$ (pot. decrescente) per $\boxed{\text{Sempre nel caso } a<3}$

$$x\in\left(0,\arccos\sqrt{\frac{a}{3}}\right),\quad x\in\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right),\pi\right)$$

$$x\in\left(-\arccos\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right),\,-\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\right)$$

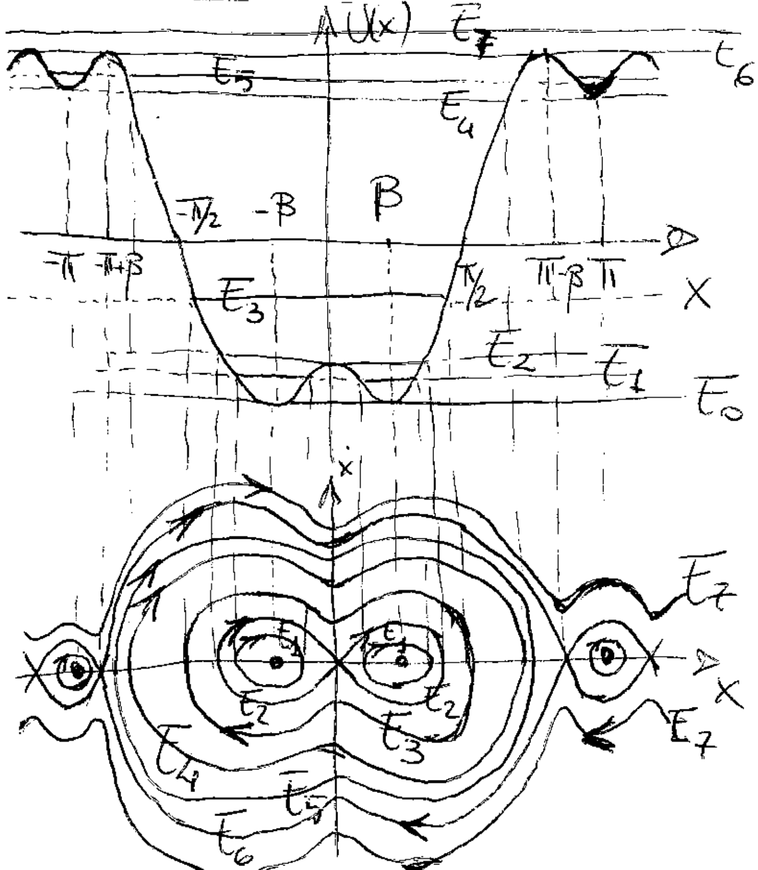
Nel caso $a\geq 3$, abbiamo che i p.ti stazionari sono solo $x=0,\pi$ e il segno della derivata di U è uguale al segno del fattore $\sin x$, quindi

$$U'(x)>0 \quad \text{per } x\in(0,\pi);$$

$$U'(x)<0 \quad \text{per } x\in(-\pi,0).$$

Conseguentemente, anche l'analisi qualitativa del moto va divisa in 2 sottocasi.

$\boxed{\text{Caso } a<3}$ Poniamo $\beta=\arccos\sqrt{\frac{a}{3}}$



Limitiamo la descrizione delle caratteristiche dei moti e delle orbite a quei livelli di energia per cui possiamo avere dei moti non periodici cioè in corrispondenza ai p.ti stazionari del potenziale.

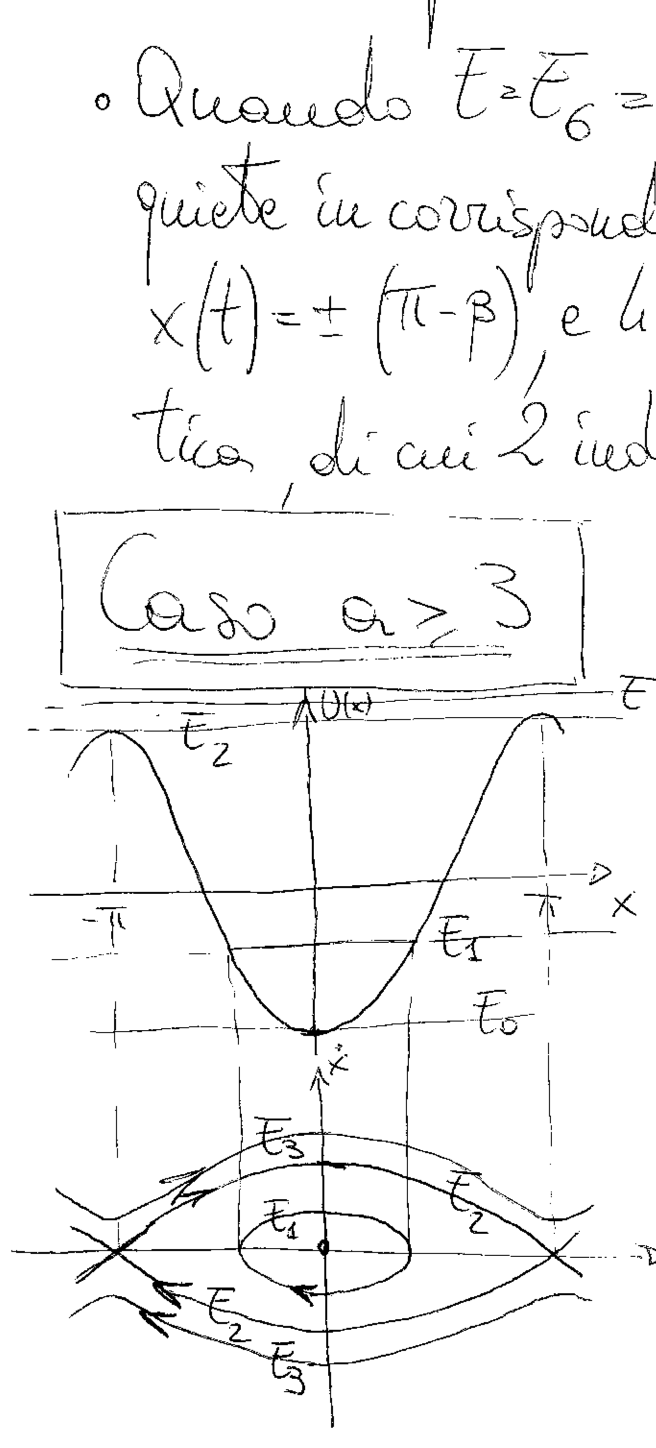
- Quando $E=E_0=U(\beta)=-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}$ abbiamo 2 sol. di quiete in 2 p.ti di equil. stabili, cioè $x(t)=\pm\beta$.

- Quando $E = E_2 = -(a-1)$, abbiamo una sol. di quiete in un p.to di equil. instabile, cioè $x(t)=0$, e 2 orbite limitate con moto a meta asintotica verso il p.to di equil. instabile

l'ordine di questi livelli si scambia quando $a<1$

- Quando $E = E_4 = a-1$, abbiamo una sol. di quiete in un p.to di equil. stabile, cioè $x(t)=\pi$, e 1 orbita periodica con $|x(t)|<\pi-\beta$.
- Quando $E = E_6 = 2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}$, abbiamo 2 sol. di quiete in corrispondenza ai p.ti di equil. instabile, cioè $x(t)=\pm(\pi-\beta)$ e 4 orbite limitate e a meta asintotica, di cui 2 indef. progressive e 2 indef. retrograde.

$\boxed{\text{Caso } a \geq 3}$



Il grafico del potenziale e il ritratto in fase sono quelli tipici del pendolo. Conseguentemente, i livelli di energia per cui si possono avere moti non periodici sono elencati qui di seguito.

- Quando $E = E_0 = -(a-1)$ abbiamo una sol. di quiete nel p.to di equil. stabile, cioè $x(t)=0$.

• Quando $E = E_2 = a-1$, abbiamo 1 sol. di quiete nel p.to di equil. instabile, cioè $x(t) = \pi$, e 2 orbite limitate con moto a meta asintotica di cui una indef. progressiva e una indef. retrograda.

Riassumendo, possiamo fornire la risposta definitiva come segue. Sia $\mathcal{E}(x_0, v_0) = \frac{1}{2} v_0^2 - a \cos x + \cos^3 x$.

- Se $a < 3$, abbiamo moti non periodici quando le condizioni iniziali (x_0, v_0) appartengono all'insieme

$$A \cup B \cup C \cup D$$

dove $A = \{(\beta, 0), (-\beta, 0)\}$

$$B = \{(x_0, v_0) : \mathcal{E}(x_0, v_0) = -(a-1)\}$$

$$C = \{(\pi, 0)\}$$

$$D = \left\{(x_0, v_0) : \mathcal{E}(x_0, v_0) = 2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\}.$$

- Se $a \geq 3$, abbiamo moti non periodici quando le cond. iniziali (x_0, v_0) appartengono all'insieme

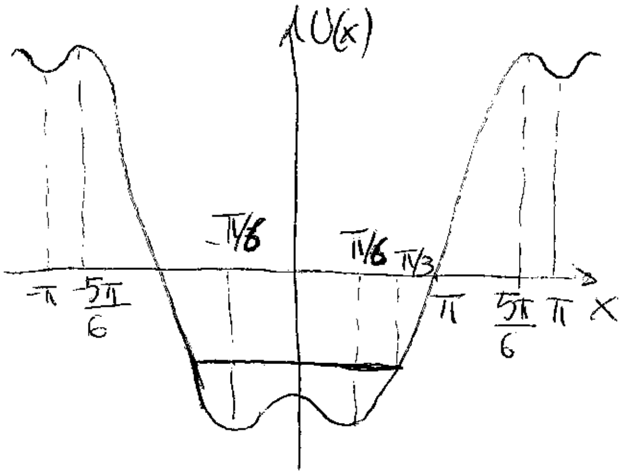
$$\{(0,0)\} \cup \{(x_0, v_0) : \mathcal{E}(x_0, v_0) = a - 1\}$$

(2) Sia ora a fissato e t.c. $a = 9/4$. Si verifichi che il moto che fa seguito alle cond. iniziali $x(0) = \pi/3$, $\dot{x}(0) = 0$ è periodico e si determino T_- e T_+ t.c.

(a) $T \geq T_-$

(b) $T \leq T_+$, con $\dfrac{T_+ - T_-}{T_+ + T_+} < 0.5$.

Siccome $a = 9/4$, allora siamo nel caso $a < 3$. Riportiamo quindi (qui a fianco) il grafico del potenziale. Abbiamo quindi che $\beta = \arccos\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{6}$.



Il livello di energia è

$$\mathcal{E}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = -\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -1,$$

che è negativa (ovviamente) e maggiore di $\mathcal{E}(0,0) = U(0) = -\frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4}$.

Di conseguenza, il livello di energia di questo esercizio è corrispondente al caso $E_3 \in (U(0), U(\pi)) = \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, del punto (1), per cui avevamo già visto che esistono solo moti periodici; questo conclude la verifica che stiamo effettivamente considerando un moto periodico.

Al fine di determinare una minorazione T_- del periodo, applichiamo la semplicissima

Stima

$$T \geq T_- := 2\,\frac{x_+ - x_-}{v_{max}} = \frac{4\pi/3}{\sqrt{U(\pi/3) - U(\pi/6)}}$$

$$= \frac{4\pi}{3\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} - 1}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1}}$$

Come spesso capita la maggiorazione del periodo (cioè la determinazione di T_+ t.c. $T \leq T_+$) è assai più difficile della minorazione. In questo caso la difficoltà principale è dovuta al fatto che la funzione ha evidentemente più di un cambio di convessità/concavità all'interno dell'intervallo di oscillazione tra x_- e x_+ (t.c. $U(x_\pm) = \mathcal{E}(\pi/3, 0)$).

Qui di seguito, verranno proposti 2 modi diversi di stimare il periodo "dal di sopra". Il primo di questi è più efficace, ma è meno intuitivo, quindi verrà descritto solo sommariamente; il secondo metodo è più semplice ma produce una stima peggiore e verrà discusso in dettaglio.

- Metodo 1 x la determinazione di T_+

Cerchiamo di determinare una funzione Φ_s che è "superiore nell'intervallo di oscillazio

...e e ha l'aspetto di un potenziale del pendolo, cioè cerchiamo $\Phi_S(x)$ t.c.

- $U(x) \leq \Phi_S(x) \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$
- $U\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \Phi_S\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$
- $\Phi_S(x) = -A\cos x + B$

Dapprima, determiniamo A e B in modo t.c.

$$\begin{cases} U(\pm\pi/3) = \Phi_S(\pm\pi/3) \\ U(0) = \Phi_S(0) \end{cases}$$ (si ricordi che 0 è p.to di max. relativo)

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{2} + B = -1 \\ -A + B = -5/4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_S := -\frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4}$$

Dobbiamo verificare che

$U(x) \leq \Phi_S(x) \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (abbiamo già fissato A e B anche in modo t.c. $U\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \Phi_S\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$).

Siccome $U(-x) = U(x)$ e $\Phi_S(-x) = \Phi_S(x)$, basta fare la verifica in $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ (sappiamo già che $U(0) = \Phi_S(0)$).

Siccome sia U che Φ_S sono funzioni di $\cos x$ (che tra l'altro è monotona e, quindi, invertibile in $(0,\pi/3)$), allora poniamo

$$u := \cos x$$

e osserviamo che

$$U(x) \leq \Phi_S(x) \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$u^3 - \frac{9}{4}u \leq -\frac{1}{2}u - \frac{3}{4} \quad \forall u \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$u^3 - \frac{7}{4}u + \frac{3}{4} \leq 0$$

(Siccome sappiamo che $U\left(\frac{\pi}{3}\right) = \Phi_S\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $U(0) = \Phi_S(0)$, allora ne segue che $u^3 - \frac{7}{4}u + \frac{3}{4} = 0$ quando $u = 1$ e quando $u = \frac{1}{2}$)

$$\Downarrow$$

$$(u-1)\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(u+\frac{3}{2}\right) < 0$$

$\to$ $u = \cos x \in [-1,1]$, quindi questo terzo fattore è sempre positivo.

$$\Downarrow$$

$$(u-1)\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right) < 0$$

$\to$ quando $u \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, proprio come volevamo verificare.

Siccome abbiamo verificato che $U(x) \leq \Phi_S(x)$ nell'intervallo che ci serve, allora

$$T \leq 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{2\left(-1 - \frac{\cos x}{2} + \frac{3}{4}\right)}} = 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{-\frac{1}{2}(1+\cos x)}}$$

L'ultimo integrale che abbiamo scritto altro non è che il periodo di oscillazione di un pendolo e siamo abituati a (provare a) stimarlo come segue

$$2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{dx}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(1+\cos x\right)}} \le 2\pi\sqrt{\frac{1}{\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]} \Phi_S''(x)}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\Phi_S''\left(\frac{\pi}{3}\right)}}$$

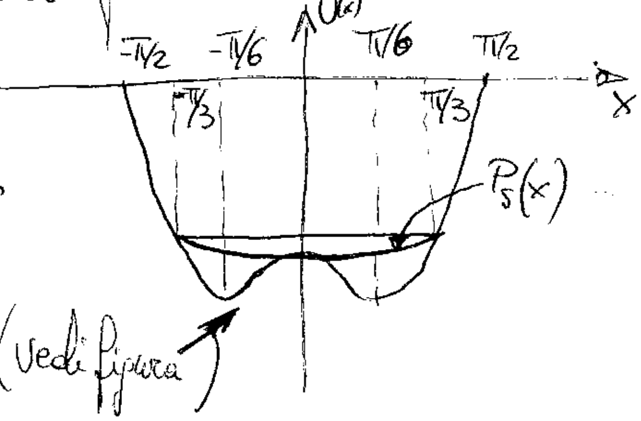
$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{1/4}} = 4\pi$$

Una prima possibile determinazione di T_- è quindi 4π.

- <u>Metodo 2 x la determinazione di T_+</u>

Siamo abituati a cercare di determinare delle parabole superiori, quindi proviamoci!

È abbastanza intuitivo che la stima migliore con una parabola superiore la possiamo ottenere per <u>quella particolare parabola</u> t.c. (Vedi figura)



$$\begin{cases} U\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = P_S\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \\ U(0) = P_S(0) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ parabola con asse di simmetria coincidente con quella delle ordinate!

$\Longrightarrow$ P.to di minimo in $x=0$, dove il minimo di P_S "tocca" il massimo relativo di $U(x)$.

$$\begin{cases} a\frac{\pi^2}{9}+c = -1 \\ c = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

dove abbiamo assunto che $P_S(x) = ax^2+c$

Ne segue che

$$\begin{cases} a\,\underline{V} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{\pi^2} = +\frac{9}{4\pi^2} \\ C = -5/4 \end{cases}$$

Dobbiamo ora verificare che

$$U(x) < P_S(x) \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

(questo basta perché abbiamo già mostrato che $U\left(\frac{\pi}{3}\right) = P_S(\pi/3)$, $U(0) = P_S(0)$ ed è evidente che sono funzioni pari)

Siccome $U(0) = P_S(0)$, $U(x)$ è decrescente in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ e $P_S(x)$ è crescente in R_+, allora è evidente che

$$U(x) < P_S(x) \quad \forall x \in (0, \pi/6].$$

Introduciamo la funzione

$$g(x) := U(x) - P_S(x).$$

Sappiamo che $g(\pi/6) < 0$, $g'(\pi/6) = U'(\pi/6) - P_S'\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ (poiché $U'(\pi/6) = 0$ e $P_S'(x) > 0$ $\forall x > 0$) e che $g(\pi/3) = 0$.

Inoltre, osserviamo che g ha la concavità verso l'alto in $[\pi/6, \pi/3]$; infatti, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ abbiamo che

$$g''(x) = U''(x) - P_S''(x) = \frac{9}{4}\cos x - 3\cos^3 x + 6\sin^2 x\cos x - \frac{9}{8\pi^2}$$

$$= \left(\frac{9}{4} - 3\right)\cos x + 9\sin^2 x\cos x - \frac{9}{8\pi^2} \cancel{> \left(\frac{9}{4}+6\right)\frac{1}{2} - 9\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{9}{8\pi^2}}$$

$$= \left(-\frac{3}{4} + 9\sin^2 x\right)\cos x - \frac{9}{8\pi^2} > \left(-\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\right)\frac{1}{2} - \frac{9}{8\pi^2} > 0$$

Adesso, possiamo facilmente verificare che
$g(x) = U(x) - P_5(x) \leq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$;
Per assurdo, supponiamo $\exists\, x^* \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ t.c.
$$g(x^*) > 0 ;$$
Siccome $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, allora $\exists\, \bar{x} \in \left(x^*, \frac{\pi}{3}\right)$ t.c.
$$g'(\bar{x}) < 0 \text{ (per il th. del valor medio).}$$
Dopo aver ricordato che $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$, allora (ripetendo lo stesso ragionamento), si vede che $\exists\, \tilde{x} \in \left(\frac{\pi}{6}, x^*\right)$ t.c.
$$g'(\tilde{x}) > 0 \text{ (sempre per il th. del val. medio).}$$
Applicando una terza e ultima volta il th. di Lagrange o del valor medio, abbiamo che
$$\exists\, \bar{\bar{x}} \in (\tilde{x}, \bar{x}) \text{ t.c. } g''(\bar{\bar{x}}) < 0 ;$$
Siccome $\bar{\bar{x}} \in (\tilde{x}, \bar{x}) \subset \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ quest'ultima affermazione contrasta con il fatto che
$$g''(x) > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right],$$
quindi siamo giunti all'assurdo.
Mettendo insieme tutti gli intervalli su cui abbiamo dimostrato che $U(x) \leq P_5(x)$, possiamo finalmente affermare con certezza che
$$U(x) \leq P_5(x) \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$
$$\text{e} \quad U\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = P_5\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).$$

Possiamo quindi scrivere la disuguaglianza:

$$T_+ := 2\pi\sqrt{\frac{1}{P_s''}} = 2\pi\Big/\sqrt{\frac{9}{8\pi^2}} = \frac{4\pi^2}{3}\sqrt{2} \geq$$

$$\geq T = 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{dx}{\sqrt{2(-1-U(x))}} .$$

In definitiva, la nostra stima finale del periodo è

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4}-1}} = T_- \leq T \leq T_+ = \frac{4\pi^2}{3}\sqrt{2},$$

dove $T_- \simeq \frac{4\pi}{3}\cdot 1{,}83 \simeq 7{,}66$

$T_+ \simeq \frac{4\pi}{3}\cdot 4{,}44 \simeq 18{,}61$

$$\Rightarrow \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \simeq \frac{4{,}44 - 1{,}83}{4{,}44 + 1{,}83} \simeq 0{,}417 < 0{,}5$$

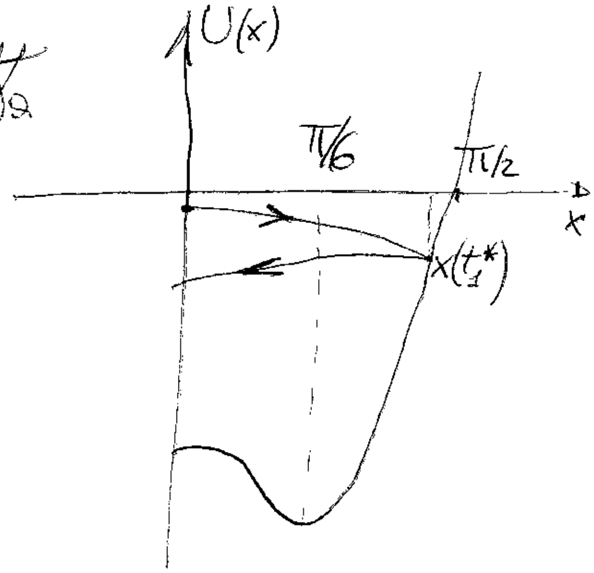
come richiesto dal testo dell'esercizio.

(3) Sia ora $\lambda = 1/5$ e si mantenga $a = 9/4$.
Siano le cond. iniz. t.c. $x(0)=0$, $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.
Si dimostri che $\exists$ valori di v_0 per cui il corrispondente moto soddisfa le 2 seguenti richieste:

(i) $x(t) < \pi/2 \quad \forall\, t \geq 0$

(ii) $\exists\, t_* > 0$ per cui $x(t_*) = 0$.

Facendo riferimento alla figura riportata all'inizio della pagina seguente, la richiesta (i)



è automaticamente soddisfatta se imponiamo che

$$\mathcal{E}(0, v_0) \leq U(\pi/2) = 0$$

$$\Rightarrow U(0) + \frac{1}{2} v_0^2 \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 \leq -U(0) = +\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow v_0 \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Affinché sia verificata la seconda richiesta, l'energia dissipata nel tragitto che conduce fino alla barriera di potenziale (compresa in $(\pi/6, \pi/2)$) e al ritorno all'asse delle ~~ascisse~~ ordinate deve essere inferiore a $\mathcal{E}(0, v_0) - U(0) = \frac{1}{2} v_0^2$.
Sia t_1^* l'istante dell'arrivo alla barriera di potenziale e t_2^* " del ritorno all'asse delle ordinate, allora la richiesta (ii) è verificata purché

$$\left| \int_0^{t_1^*} dt\, \mathring{\mathcal{E}}(x(t), \dot{x}(t)) \right| + \left| \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt\, \mathring{\mathcal{E}}(x(t), \dot{x}(t)) \right| \leq \frac{1}{2} v_0^2 .$$

Possiamo sovrastimare l'energia dissipata nel tragitto di andata come segue:

$$\left| \int_0^{t_1^*} dt\, \mathring{\mathcal{E}}(x(t), \dot{x}(t)) \right| = \lambda \int_0^{x(t_1^*)} dx \sqrt{\mathcal{E}(x, \dot{x}) - U(x)} <$$

$$< \lambda \int_0^{\pi/2} dx \sqrt{U\left(\frac{\pi}{2}\right) - U\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \lambda \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Per quanto riguarda il ritorno, possiamo ripetere lo stesso ragionamento per ottenere che

$$\left|\int_{t_1^*}^{t_2^*} dt\, \mathring{\mathcal{E}}\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\right| \leq \lambda \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} \,.$$

Possiamo quindi concludere che l'energia dissipata è sovrastimata come segue:

$$\left|\int_{0}^{t_1^*} dt\, \mathring{\mathcal{E}}\right| + \left|\int_{t_1^*}^{t_2^*} dt\, \mathring{\mathcal{E}}\right| < \lambda \pi \sqrt{\frac{5}{4}}$$

La velocità iniziale, deve quindi le 2 seguenti disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} v_0^2 \leq \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} v_0^2 \geq \lambda \pi \sqrt{\frac{5}{4}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_0 \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \simeq 1{,}58 \\ v_0 \geq \sqrt{\frac{2\pi}{5}\sqrt{\frac{5}{4}}} \simeq 1{,}19 \end{cases}$$

v_0 deve quindi appartenere all'~~intervallo~~ insieme (non vuoto!)

$$\left[\sqrt{\frac{2\pi}{5}\sqrt{\frac{5}{4}}}\,,\ \sqrt{\frac{5}{2}}\right] .$$