

I prova di esonero di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
23 Aprile 2015

Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto all'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} - \lambda \dot{x} ,$$

dove $x \in \mathbf{T}$, $\lambda \geq 0$ è il coefficiente di attrito e l'energia potenziale $U(x)$ è definita come segue:

$$U(x) = -a \cos x + \cos^3 x ,$$

con valore del parametro tale che $a > 1$.

- (1) Si studi il caso conservativo ($\lambda = 0$). Si determinino tutte e sole le condizioni iniziali del tipo:

$$(x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0) ,$$

cui fanno seguito dei moti $x(t)$ non periodici rispetto al tempo t .

- (2) Limitatamente al caso con $\lambda = 0$ e $a = 9/4$, si verifichi che il moto con condizione iniziale

$$\left(x(0) = \frac{\pi}{3}, \dot{x}(0) = 0\right)$$

è periodico. Inoltre, si dia una stima del periodo T del moto, determinando *esplicitamente*

- (2A) un numero reale positivo T_- tale che $T \geq T_-$;

- (2B) un numero reale $T_+ \geq T$ tale da soddisfare la seguente proprietà riguardante l'errore relativo della stima:

$$\frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} \leq 0.5 .$$

- (3) Si ponga ora $\lambda = 1/5$ e si mantenga $a = 9/4$; si considerino i moti $x(t)$ che fanno seguito alla famiglia di condizioni iniziali

$$(x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0) .$$

Si dimostri che esistono dei valori *positivi* di v_0 tali che la corrispondente legge di moto soddisfa entrambe le due seguenti richieste:

- (i) $x(t) < \pi/2 \forall t \geq 0$;

- (ii) esiste un istante di tempo $t_\star > 0$ per cui avviene che $x(t_\star) = 0$.