

II Esame, giugno 2015

pag. 1

disco omogeneo

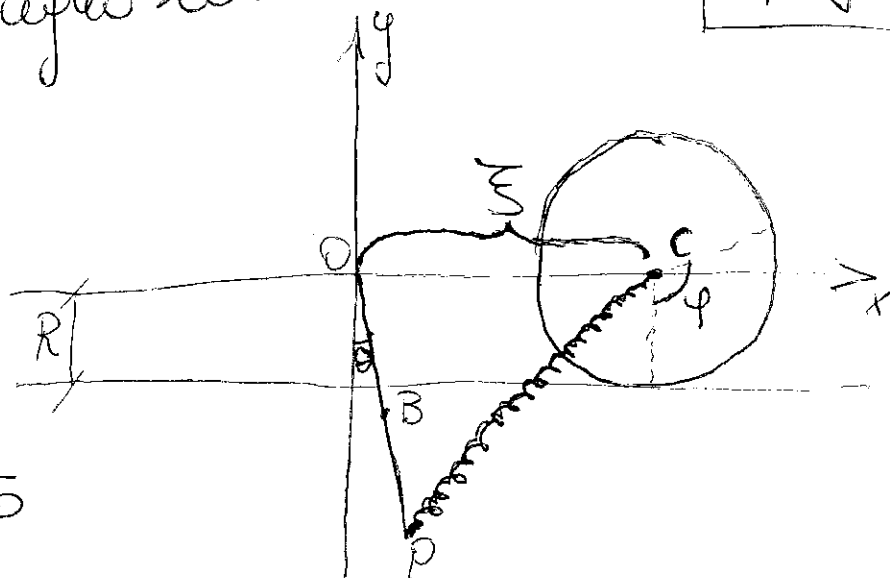
asta omogenea

massa disco = M

raggio disco = R

lunghezza asta = $l = \overline{OP}$

massa asta = m



disco rotola senza strisciare su guida orizzontale $y = -R$
costante elastica della molla tra P e $C = k$

1) Calcolo della Lagrangiana e delle eq. di Lagrange

Scegliamo come coordinate libere o Lagrangiane
 (ξ, θ) ,

cioè l'ascissa del centro del disco e l'angolo formato da $\vec{P}$ con la verticale discendente.

L'angolo φ di avanzamento del disco non è scelto rispetto a ξ , anzi la condizione che il disco rotola senza strisciare implica che
 $\xi + R\varphi = 0$.

Calcoliamo l'energia cinetica del disco; a questo scopo

applichiamo il teorema di König:

pag. 2

$$T_{\text{disco}} = \frac{1}{2} M \underline{v}_C \cdot \underline{v}_C + \frac{1}{2} I_{\text{disco}} \dot{\varphi}^2$$

eu. cin.
come se
tutta la
massa
fosse nel
baricentro C

↑
Inerzia del disco
rispetto all'asse verticale
al piano Oxy
e passante
per C.

dove $\underline{v}_C = (\dot{\xi}, 0)$, e $\dot{\varphi}^2 = (\dot{\xi}/R)^2 = \dot{\xi}^2/R^2$ e

$$I_{\text{disco}} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R dr 2\pi r^3 = \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{MR^4}{2R^2} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\Rightarrow T_{\text{disco}} = \frac{1}{2} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{4} MR^2 \frac{\dot{\xi}^2}{R^2} = \frac{3}{4} M \dot{\xi}^2$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica dell'asta,
invece, basta applicare la formula

$$T_{\text{asta}} = \frac{1}{2} I_{\text{asta}} \dot{\theta}^2$$

dove I_{asta} è l'inerzia rispetto alle rotazioni attorno
a un'asse fisso perpendicolare all'asta e passante per un
suo vertice, quindi è noto che $I_{\text{asta}} = \frac{ml^2}{3}$

$$\Rightarrow T_{\text{asta}} = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Possiamo scrivere l'energia cinetica totale

$$T = \frac{3}{4} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2$$

Ora ci occupiamo del calcolo dell'ener- pag. 3
gia potenziale.

Cominciamo a scrivere

$$U = mgy_B + \frac{1}{2}k\overline{PC}^2,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che l'energia potenziale gravitazionale totale dell'asta (in quanto essa è un corpo rigido) è uguale a quella che si avrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo baricentro, B.

Per la stessa ragione non viene sommato l'addendo Mgy_c (equivalente all'energia potenziale gravitazionale totale del ~~baricentro~~ disco), poiché y_c è costante (ed è addirittura nulla) siccome il disco è vincolato a scorrere su una guida orizzontale.

Sostituiamo y_B e $\overline{PC}^2$ con le loro espressioni in funzione delle coordinate lagrangiane. Otteniamo:

$$U = -mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\left[\xi - l\sin\theta\right]^2 + l^2\cos^2\theta =$$

$$= -mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\xi^2 - k\xi l\sin\theta + \frac{1}{2}kl^2$$

dove abbiamo omissso una costante additiva, in quanto non esercita nessuna influenza sulla dinamica.

Possiamo finalmente scrivere la lagrangiana

$$L = \frac{3}{4} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \frac{l}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} k \xi^2 + kl \xi \sin \theta \quad \text{pag. 6}$$

e le equazioni di Lagrange

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{3}{2} M \ddot{\xi} + k \xi - kl \sin \theta = 0 \right.$$

$$\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m l^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{mgl \sin \theta}{2} - kl \xi \cos \theta = 0 \right.$$

2) Si determinino i p.t.c di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.

Dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial \xi} = k \xi - kl \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = l \sin \theta \right.$$

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{mgl \sin \theta}{2} - kl \xi \cos \theta = 0 \Rightarrow l \left(\frac{mg \sin \theta}{2} - kl \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \right.$$

Nell'ultima eq. che abbiamo scritto, compare solo l'incognita θ :

$$l \sin \theta \left(\frac{mg}{2} - kl \cos \theta \right) = 0$$

$$\swarrow$$

$$\sin \theta = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = 0, \pi$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{mg}{2kl}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \pm \beta \quad \text{dove } \beta = \arccos \frac{mg}{2kl}$$

queste sol. $\exists$ se $\frac{mg}{2kl} \leq 1$

Se $\theta = 0$, il corrispondente valore di $\xi = l \sin \theta = 0$ pag. 5
 " $\theta = \pi$, " " " " $\xi = 0$
 " $\theta = \pm \beta$, " " " " $\xi = \pm l \sin \beta$.

Riassumendo i p.ti di equilibrio sono

$$(\xi, \theta) \in \{ (0, 0), (0, \pi), (l \sin \beta, \beta), (-l \sin \beta, -\beta) \}.$$

Per studiarne la stabilità, dobbiamo calcolare

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} k & -kl \cos \theta \\ -kl \cos \theta & \frac{mgl}{2} \cos \theta + kl \xi \sin \theta \end{pmatrix}$$

Consideriamo i vari casi particolari.

Caso $(\xi, \theta) = (0, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=0}} = \begin{pmatrix} k & -kl \\ -kl & \frac{mgl}{2} \end{pmatrix}$$

Si trova $\det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=0}} = kl \left(\frac{mg}{2} - kl \right)$ e la

traccia $k + \frac{mgl}{2}$ è evidentemente positiva, allora

Se $\frac{mg}{2kl} > 1 \Rightarrow 2$ autovel. pos. $\Rightarrow (0, 0)$ è STABILE

Se $\frac{mg}{2kl} = 1 \Rightarrow 1$ autovel. pos. $\Rightarrow$ occorre un supplemento di indagine
 e 1 nullo

Se $\frac{mg}{2kl} < 1 \Rightarrow 1$ autovel. pos. $\Rightarrow (0, 0)$ è INSTABILE
 e 1 neg.

Caso $(\xi, \theta) = (0, \pi)$

pag. 6

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=\pi}} = \begin{pmatrix} k & k\ell \\ k\ell & -\frac{mg\ell}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Siccome $\det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=\pi}} = -k\ell \left(\frac{mg}{2} + k\ell \right) < 0$, allora
1 autovel. è pos. e un altro è neg. $\Rightarrow (0, \pi)$ è INSTABILE.

Caso $(\xi, \theta) = (\pm \ell \sin \beta, \pm \beta)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=\pm \ell \sin \beta \\ \theta=\pm \beta}} = \begin{pmatrix} k & -k\ell \cos \beta \\ -k\ell \cos \beta & \frac{mg\ell \cos \beta}{\sqrt{2}} + k\ell^2 \sin^2 \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Calcoliamo } \det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\xi=\pm \ell \sin \beta \\ \theta=\pm \beta}} &= k\ell \left(\frac{mg}{2} \cos \beta + k\ell - 2k\ell \cos^2 \beta \right) \\ &= k\ell \left(\frac{mg}{2} \frac{mg}{2k\ell} + k\ell - 2k\ell \frac{m^2 g^2}{4k^2 \ell^2} \right) \\ &= k\ell^2 \left(-\frac{m^2 g^2}{4k^2 \ell^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Siccome la traccia della matrice è

$$k + \frac{mg\ell}{2} \frac{mg}{2k\ell} + k\ell^2 \sin^2 \beta > 0,$$

allora abbiamo i seguenti sottocasi:

se $\frac{mg}{2k\ell} < 1 \Rightarrow \det \text{ e } \text{Tr} \text{ sono pos.} \Rightarrow 2 \text{ autovel. pos.}$
 $\Rightarrow (\pm \ell \sin \beta, \pm \beta) \text{ sono STABILI};$

se $\frac{mg}{2k\ell} = 1 \Rightarrow \det = 0 \text{ e } \text{Tr} > 0 \Rightarrow 1 \text{ autovel. pos. e 1 multo}$
 $\Rightarrow \text{occorre un supplemento di indagine};$

Se $\frac{mg}{2kl} > 1 \Rightarrow$ i p.ti di equilibrio $(\pm l \sin \beta, \pm \beta)$ non esistono pag. 7
 poiché $\beta = \arccos \frac{mg}{2kl}$

Riassumiamo la discussione ^{sulla stabilità} ~~come~~ nella tabella seguente:

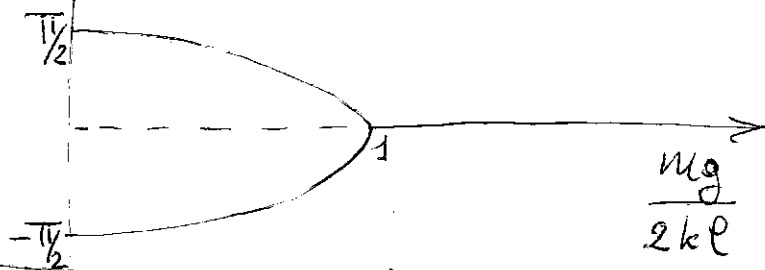
$\frac{mg}{2kl}$ (ξ, θ)	< 1	$= 1$	> 1
$(0, 0)$	INST.	BOH?!	STAB.
$(0, \pi)$	INST.	INST.	INST.
$(\pm l \sin \beta, \pm \beta)$	STAB.	BOH?!	?

Possiamo anche riassumere la situazione nel grafico seguente:

θ
 desc. p.ti
 di eq.

Dipende: STAB.

 ----- INST.



Riconosciamo qui sopra la tipica situazione della biforcazione a forchetta di un p.to di eq. stabile, questo ci porta a congetturare che il caso indeciso sia STABILE.

dal grafico qui a fianco abbiamo sfruttato l'ovvia osservazione seguente:
 Se $\frac{mg}{2kl} = 1 \Rightarrow \beta = 0$
 $\Rightarrow (\pm l \sin \beta, \pm \beta) = (0, 0)$

Studiamo l'ultimo caso indeciso, cioè

il p.to di equilibrio $(0, 0) = (\pm l \sin \beta, \pm \beta)$ quando $\frac{mg}{2kl} = 1$.

Osserviamo che $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \text{unif } U(\xi, \theta) = +\infty$, quindi

la funzione $U: \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ deve avere il suo minimo assoluto

"al finito" e siccome $U \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, tale p.to di minimo deve essere in corrispondenza o un p.to stazionario. [pag. 8]

I p.ti stazionari nel caso $\frac{mg}{2k\ell} = 1$ sono solo due:

$$(0, 0) \text{ e } (0, \pi)$$

ma il secondo di questi ha l'Hessiano con 1 autoval. pos. e 1 neg., quindi è un p.to di sella e non può essere p.to di minimo. $(0, 0)$ è quindi p.to di minimo perché

non ce ne possono essere altri e almeno 1 esiste (per l'osservazione fatta alla fine della pag. precedente).

Siccome $(0, 0)$ è un p.to di minimo lo assoluto per il potenziale U allora è un p.to di equilibrio STABILE (per il th. di Lagrange-Dirichlet).

3) Supponiamo ora che il sistema sia sottoposto agli effetti di un campo elettrico $E \underline{e}_y$ con E costante in ogni p.to del riferimento Oxy . Inoltre, si supponga che in P vi sia una carica elettrica q . Si determini un valore di q tale che esistano soluzioni delle eq. del moto t.c. l'asta giace $\forall$ tempo t sull'asse delle x . Inoltre, si scrivano le soluzioni esplicite delle eq. del moto per quel valore di q .

Possiamo mantenere la descrizione lagrangiana / pag. 9
del sistema, aggiungendo a L il termine potenziale
$$U_{el} = -q \mathcal{E} y_P = +q \mathcal{E} l \cos \theta.$$

Studiamo quindi la nuova ~~la~~ lagrangiana

$$L = L + U_{el} = \frac{3}{4} M \dot{\xi}^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{mg}{2} - q\mathcal{E} \right) l \cos \theta - \frac{1}{2} k \xi^2 + k l \xi \sin \theta$$

le nuove eq. del moto sono quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} M \ddot{\xi} + k(\xi - l \sin \theta) = 0 \\ \frac{m l^2}{3} \ddot{\theta} + \left(\frac{mg}{2} - q\mathcal{E} \right) l \sin \theta - k l \xi \cos \theta = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m l^2}{3} \ddot{\theta} + \left(\frac{mg}{2} - q\mathcal{E} \right) l \sin \theta - k l \xi \cos \theta = 0 \end{array} \right.$$

Affinché $\theta(t) = \pm \pi/2$ sia soluzione della seconda eq. di lagrange, ~~si~~ è conveniente porre

$$\frac{mg}{2} - q\mathcal{E} = 0 \Rightarrow \boxed{q = \frac{mg}{2\mathcal{E}}}$$

Come detto $\theta(t) = \pm \pi/2$ è sol. della 2ª eq. del moto se $q = \frac{mg}{2\mathcal{E}}$.
Consideriamo ora la 1ª eq.

Se $\theta = \pi/2$, la 1ª eq. diventa

$$\frac{3}{2} M \ddot{\xi} = -k\xi + kl, \text{ che è l'eq. di un oscillatore armonico pesante, quindi } \boxed{\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + l}$$

dove $\omega = \sqrt{k/(3/2)}$

Se $\theta = -\pi/2$, la 1ª eq. diventa

$$\frac{3}{2} M \ddot{\xi} = -k\xi - kl, \text{ che la cui soluzione è } \boxed{\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) - l}$$

Ricordiamo che nelle soluzioni

pag. 10.

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \pm \ell$$

ω e ℓ sono parametri del sistema, mentre A e φ sono determinate dalle condizioni iniziali del problema di Cauchy da risolvere.

In ogni caso, il moto è evidentemente periodico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}}.$$