

II prova di esonero di Fisica Matematica I
Corso di laurea in Matematica
4 giugno 2015

Un sistema meccanico è costituito da un'asta e un disco; entrambi sono corpi rigidi con densità di massa omogenea al loro interno e si muovono in un piano **verticale** Oxy . L'asta è di massa m e di lunghezza l ; essa è vincolata in modo tale che un suo estremo A è posto in corrispondenza all'origine. Il disco è di massa M , raggio R e rotola senza strisciare su una guida orizzontale che è posta a distanza R più in basso rispetto all'asse x . Una molla ideale, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, collega tra loro i punti P e C , tali che P è il secondo estremo dell'asta^[*] e C è il centro del disco. I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il loro moto, l'asta e il disco si possono attraversare senza scontrarsi. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si supponga ora che nel punto P sia posta una carica elettrica $q > 0$; inoltre, il sistema sia anche soggetto a un campo elettrico uniforme di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse y .
 - (3A) Si determini un valore di q per cui esistono moti del sistema tali che l'asta rimane costantemente sovrapposta all'asse delle x anche se il disco non è in quiete.
 - (3B) Nel caso in cui il valore di q sia proprio quello determinato al precedente punto (3A), si scriva esplicitamente la legge generale $t \mapsto x_C(t)$ che descrive il moto del punto C che sta al centro del disco.

^[*] Ovviamente, il dispositivo vincolare cui è soggetta l'asta fa sì che il punto P si muove su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio l .