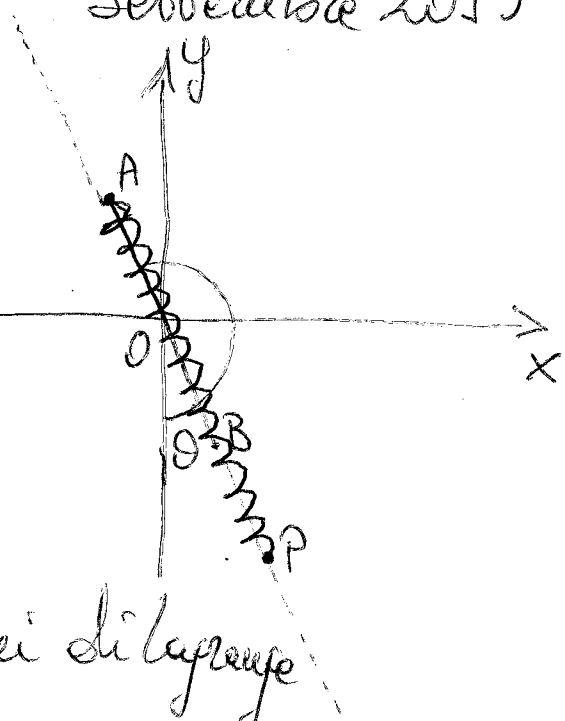
Esame di Settembre 2015

Lunghezza asta $AB = 2\ell$.
Massa asta $AB = M$
$AO = OB = \ell$
massa $P = m$
massa guida rettilinea (di lungh. infinita) cui appartiene $AB = 0$



(1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange

Prendiamo, come coordinate libere o lagrangiane, (ξ, θ).

θ è l'angolo formato dalla semiretta OA con la verticale discendente; ξ è l'ascissa sulla guida curvilinea, considerando O (che appartiene alla guida) come il p.to corrispondente a $\xi = 0$ e assumendo come valori positivi di ξ quelli t.c. il punto P si trova dalla stessa parte di A rispetto a O.

Coordinate di A: $(\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta)$

" di B: $(-\ell\sin\theta, \ell\cos\theta)$

" " P: $(\xi\sin\theta, -\xi\cos\theta)$

$$\underline{v}_P = \left(\dot\xi \sin\theta + \xi\dot\theta\cos\theta,\ -\dot\xi\cos\theta + \xi\dot\theta\sin\theta\right).$$

Procediamo al calcolo di energia cinetica ed en. potenziale.

$$T = \frac{1}{2} I \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P,$$

dove I è l'inerzia dell'asta, cioè (con facili calcoli già effettuati in vari altri esami scritti)

$$I = \frac{1}{12} M (2\ell)^2 = \frac{M\ell^2}{3},$$

mentre $\underline{v}_P \cdot \underline{v}_P = \dot\xi^2 + \xi^2\dot\theta^2$ (si ricordi l'espressione dell'energia cinetica in coord. polari); quindi,

$$T = \frac{1}{6} M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2} m\dot\xi^2 + \frac{1}{2} m \xi^2\dot\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} m\dot\xi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M\ell^2}{3} + m\xi^2\right)\dot\theta^2.$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, dobbiamo solo esprimere

$$U = mg\, y_P + \frac{1}{2} k \overline{PA}^2$$

in funzione delle coord. libere (ξ, θ), quindi,

$$U = -mg\,\xi\cos\theta + \frac{1}{2} k(\xi - \ell)^2.$$

Possiamo finalmente scrivere la lagrangiana che è

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M\ell^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta}^2 + mg\xi\cos\theta$$
$$- \frac{1}{2} k \xi^2 + k\ell\xi .$$

Le equazioni di Lagrange assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \xi} = m\ddot{\xi} - m\xi\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + k(\xi-\ell) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \left(\dfrac{M\ell^2}{3} + m\xi^2\right)\ddot{\theta} + 2m\xi\dot{\xi}\dot{\theta} + mg\xi\sin\theta = 0 \end{cases}$$

2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = -mg\cos\theta + k(\xi-\ell) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = mg\xi\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue che

$$\xi = 0 \quad \text{oppure} \quad \theta = 0, \pi$$

Se immettiamo $\xi = 0$ nella prima equazione, otteniamo che

$$-mg\cos\vartheta - k\ell = 0 \Rightarrow \cos\vartheta = -\frac{k\ell}{mg}$$

$\Rightarrow \vartheta = \pm\beta$ dove $\beta = \arccos\left(-\frac{k\ell}{mg}\right)$, che $\exists$ sse $\frac{k\ell}{mg} \leq 1$.

Se invece $\vartheta = 0$, allora otteniamo che

$$-mg + k(\xi - \ell) = 0 \Rightarrow \xi = \ell + \frac{mg}{k}.$$

Se invece $\vartheta = \pi$ dalla prima eq. otteniamo che

$$mg + k(\xi - \ell) = 0 \Rightarrow \xi = \ell - \frac{mg}{k}.$$

Riassumendo i punti di equilibrio sono

$$(\xi, \vartheta) = \left\{\left(\ell + \frac{mg}{k}, 0\right), \left(\ell - \frac{mg}{k}, \pi\right), (0, \pm\beta)\right\},$$

dove l'ultima coppia di p.ti di equilibrio esiste se e solo se $\frac{k\ell}{mg} \leq 1$.

Per potere discutere la stabilità dei p.ti di equilibrio, è conveniente calcolare l'Hessiano del potenziale

$$\operatorname{Hess} U = \begin{pmatrix} k & mg\sin\vartheta \\ mg\sin\vartheta & mg\xi\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora i vari casi particolari

- Caso $(\xi, \theta) = \left(l + \frac{mg}{k}, 0\right)$

$$\Rightarrow \text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\xi = l + mg/k \\ \theta = 0}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl + \frac{m^2 g^2}{k} \end{pmatrix}$$

I due autovalori sono evidentemente positivi quindi evidentemente è un p.to di equilibrio STABILE.

- Caso $(\xi, \theta) = \left(l - \frac{mg}{k}, \pi\right)$

$$\Rightarrow \text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\xi = l - \frac{mg}{k} \\ \theta = \pi}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg\left(-l + \frac{mg}{k}\right) \end{pmatrix}$$

Se $\cancel{\frac{mg}{kl}}\ \frac{kl}{mg} < 1$, i 2 autoval. sono positivi

$\Rightarrow$ è un p.to di equil. STABILE.

Se $\frac{kl}{mg} = 1$, 1 autoval. è pos e l'altro è nullo, quindi occorre un supplemento di indagine

Se $\frac{kl}{mg} > 1$, 1 autoval. è pos. e l'altro è neg.,

$\Rightarrow$ è un p.to di equil. INSTABILE.

• Casi $(0, \pm\beta)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \vartheta=\pm\beta}} = \begin{pmatrix} k & \pm mg\sin\beta \\ \pm mg\sin\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det \mathrm{Hess}\, U = -m^2 g^2 \sin^2\beta$

Se $\frac{kl}{mg} < 1$, allora $\beta = \mathrm{acos}\left(-\frac{kl}{mg}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$\Rightarrow$ det Hess $U < 0$ $\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg.

$\Rightarrow$ p.to di equil. INSTABILE

Se $\frac{kl}{mg} = 1$, allora $\beta = \pi$ $\Rightarrow$ det Hess $U = 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo, allora

serve un supplemento di indagine.

Se $\frac{kl}{mg} > 1$, il problema non esiste

perché non esistono affatto i p.ti $(0, \pm\beta)$.

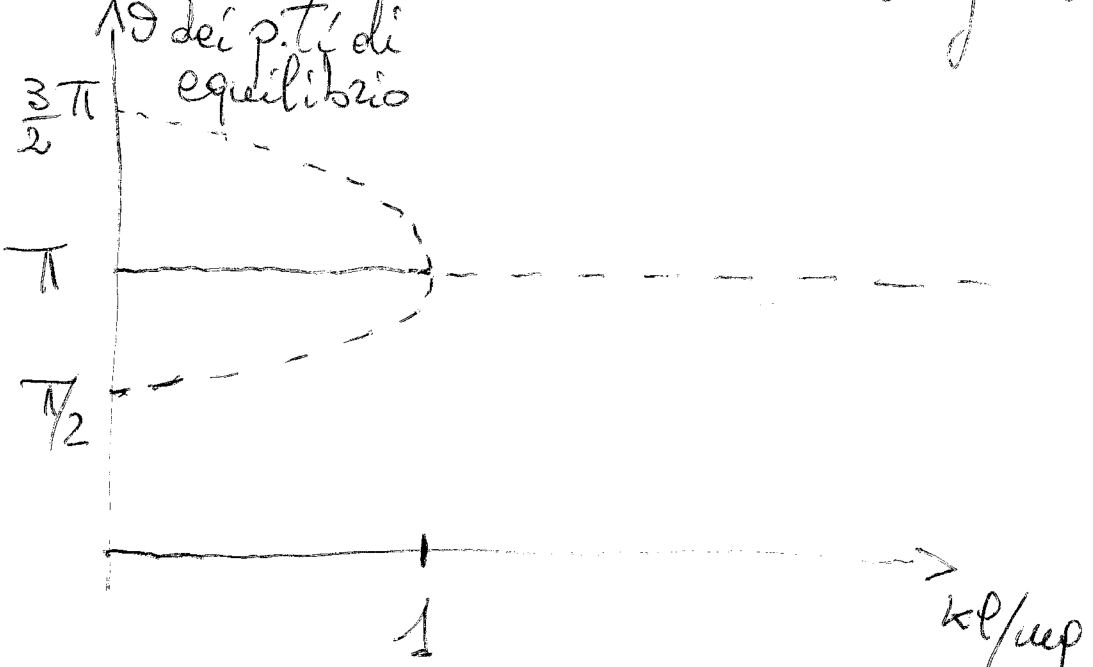
Discutiamo ora l'unico caso indeciso, cioè quello con valori dei parametri t.c. $kl/mg = 1$.

I tre punti di equilibrio indecisi, cioè

$$\left(l - \frac{mg}{k}, \pi\right), \ (0, \pm\beta) \ \text{con } \beta = \mathrm{acos}\left(-\frac{kl}{mg}\right) = \pi,$$

Sono, in realtà, sovrapposti in $(0, \pi)$.

Riassumiamo la situazione con il seguente grafico:



Riconosciamo la classica situazione della biforcazione a forchetta di un p.to di equilibrio INSTABILE. Possiamo quindi CONGETTURARE che per $\frac{kl}{mg} = 1$, il p.to di equilibrio $(0, \pi)$ sia INSTABILE.

Per darne dimostrazione completa di quest'ultima affermazione, bisognerebbe trovare una sol. delle eq. di Lagrange che, per quanto siano vicine le cond. iniz. a $(0, \pi)$, essa si allontana ~~definitivamente~~ dal punto di equilibrio. La dimostrazione dell'esistenza di un tale moto è piuttosto complicato e, quindi, ciò viene omesso.

3) Si consideri ora il sistema in condizioni di assenza di gravità (cioè si ponga $g=0$).

3a) Quali sono le costanti del moto?

3b) Si studino le orbite descritte dai moti che fanno seguito a cond. iniz. t.c. l'asta e il punto P sono sull'asse x con velocità orizzontale (di P) nulla e sia la velocità verticale $v_P(0) \neq 0$.

Si determini l'equazione polinomiale che deve essere soddisfatta dalla posizione di P (relativa all'origine sulla guida rettilinea) affinché l'orbita che fa seguito a quelle cond. iniz. sia circolare.

Quando $g=0$ la Lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M\ell^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k\xi^2 + k\ell\xi$$

Siccome $\partial L/\partial\theta = 0$ allora si conserva il momento coniugato:

$$J := \partial L/\partial\dot{\theta} = \left(\frac{M\ell^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta}$$

E' facile osservare che

$$J = I\dot{\theta} + m\xi \cdot (\xi\dot{\theta})$$

è il momento angolare (lungo l'asse z) del sistema, siccome $\xi\dot{\theta}$ è la vel. tangenziale di P.

Inoltre, siccome $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, allora si conserva l'energia:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(\xi - l)^2$$

Poniamo il sistema delle leggi di conservazione e procediamo come per i moti centrali

$$\forall t \begin{cases} \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(\xi - l)^2 = E \\ J = \left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)\dot{\theta} \end{cases}$$

Possiamo infatti studiare separatamente il moto radiale introducendo il potenziale efficace: siccome $\dot{\theta} = \frac{J}{\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2}$,

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{J^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)} + \frac{1}{2}k(\xi - l)^2 = E,$$

quindi definiamo

$$U_{eff} := \frac{J^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)} + \frac{1}{2}k(\xi - l)^2$$

Possiamo quindi descrivere il moto puramente radiale di P, come in un problema di meccanica 1-D con forze puramente posizionali. In particolare le sol. di equilibrio per il moto radiale (cioè quelle per cui $\dot{\xi} = 0$) sono t.c.

$$\frac{dU_{eff}}{d\xi} = -\frac{J^2 m\xi}{\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)^2} + k(\xi - l) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k(\xi - l)\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)^2 - J^2 m\xi = 0}$$

che è la ~~per~~ relazione polinomiale richiesta, perché ogni sol. $\bar{\xi}$ dell'eq. precedente sarà t.c. esiste la corrispondente sol. di moto circolare unif. con $\xi(t) = \bar{\xi}$ e $\dot{\theta} = \frac{J}{\frac{Ml^2}{3} + m\bar{\xi}^2}$.

4) Ora si immagini che nella guida rettilinea può essere prodotto un campo elettrico uniforme che è sempre parallelo ed equiverso al vettore

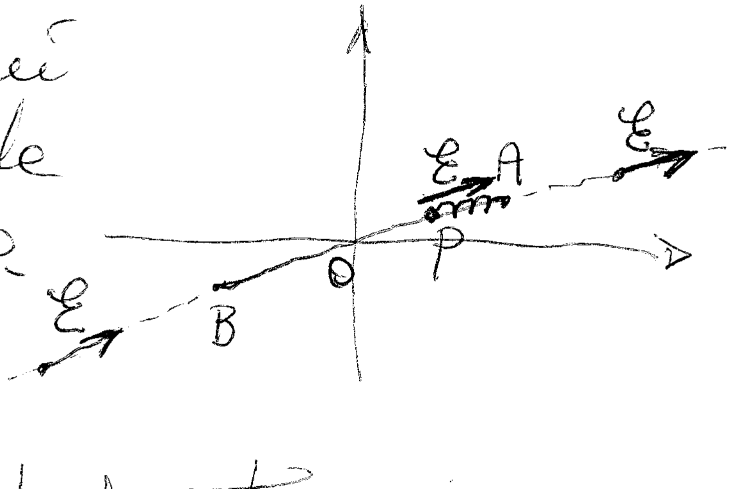
$\vec{OA}$. Sia $\mathcal{E}$ il valore della norma di tale campo elettrico e sia q la carica elettrica del punto P.

(4a) Si determini il valore di q tale che le soluzioni dell'eq. polinomiale richiesta al punto (3b) (e modificata in modo da tenere conto degli effetti del campo elettrico) siano simmetriche rispetto all'origine.

(4b) Si determinino le distanze dal centro delle orbite circolari di P quando il valore di q è quello richiesto al punto (4a)

(4a) Riferendosi alla figura qui alla destra, si comprende facilmente che bisogna aggiungere il termine

$$U_{el} = -q\mathcal{E}\xi$$



al potenziale efficace, che quindi diventa

$$U_{eff} = \frac{J^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3}+m\xi^2\right)} + \frac{1}{2}k(\xi-l)^2 - q\mathcal{E}\xi$$

Affinché le soluzioni dell'eq.

$$\frac{dU_{eff}}{d\xi} = 0$$

siano simmetriche rispetto all'origine basta che U_{eff} sia una funzione pari o dispari. Affinché U_{eff} sia pari, basta che i termini lineari in ξ si cancellino tra loro, quindi deve essere

$$\left(-kl - q\mathcal{E}\right)\xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow q = \frac{kl}{\mathcal{E}}.$$

(4b) Possiamo quindi scrivere il nuovo potenziale efficace come segue:

$$U_{eff} = \frac{J^2}{2\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)} + \frac{1}{2}k\xi^2 + \frac{1}{2}kl^2$$

Le orbite circolari si trovano risolvendo l'eq.:

$$\frac{dU_{eff}}{d\xi} = -\frac{J^2 m\xi}{\left(\frac{Ml^2}{3} + m\xi^2\right)^2} + k\xi = 0$$

$$\Rightarrow k\xi\left(m^2\xi^4 + \frac{2mMl^2}{3}\xi^2 + \frac{M^2l^4}{9} - \frac{J^2m}{k}\right) = 0$$

Abbiamo quindi una soluzione per $\xi = 0$.
Le altre soluzioni si ottengono dalla seguente eq. biquadratica:

$$\xi^4 + \frac{2Me^2}{3m}\xi^2 + \frac{M^2e^4}{9m^2} - \frac{J^2}{mk} = 0$$

$$\Rightarrow \xi^2 = -\frac{Me^2}{3m} \pm \sqrt{\cancel{\frac{M^2e^4}{9m^2}} - \cancel{\frac{M^2e^4}{9m^2}} + \frac{J^2}{mk}}$$

$$= -\frac{Me^2}{3m} \pm \frac{J}{\sqrt{mk}}$$

La soluzione con il segno - è da scartare perché le corrispondenti radici dell'eq. in ξ sono immaginarie pure

Abbiamo quindi che

se $J^2 \leq \frac{M^2e^4k}{9m}$ abbiamo una sola soluzione stazionaria del moto radiale in $\xi = 0$;

se invece $J^2 > \frac{M^2e^4k}{9m}$ abbiamo tre soluzioni stazionarie del moto radiale in $\xi = 0$, e $\xi = \pm\sqrt{\frac{J}{\sqrt{mk}} - \frac{Me^2}{3m}}$