

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
24 Settembre 2015

Un sistema meccanico è costituito da un'asta rigida e da un punto materiale P , che si muovono in un piano verticale Oxy . L'asta rigida ha densità di massa omogenea al suo interno, è di massa M e lunghezza $2l$. Essa è vincolata in modo tale che il punto medio tra i suoi vertici A e B sia sempre coincidente con l'origine O , attorno alla quale l'asta stessa è libera di ruotare. Una guida rettilinea di lunghezza infinita e di massa trascurabile è sempre sovrapposta al segmento AB . Il punto P ha massa m ed è libero di muoversi su tale guida rettilinea. Una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo nulla collega il punto P al vertice (dell'asta) A .

Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
- (3) Si studi il sistema in condizioni di assenza di gravità (cioè si ponga $g = 0$).
 - (3a) Si determinino gli integrali primi del sistema, dando giustificazione del fatto che essi sono effettivamente costanti del moto.
 - (3b) Si considerino condizioni iniziali tali che al tempo $t = 0$ l'asta è in posizione orizzontale, il punto P si trova in corrispondenza al valore \bar{x} (dell'ascissa del riferimento Oxy) con velocità orizzontale nulla, mentre il momento angolare totale del sistema è $\bar{J} \neq 0$.
Si determini l'equazione polinomiale $\mathcal{P}_1(\bar{x}) = 0$, la quale deve essere soddisfatta dall'ascissa iniziale, affinché il moto del punto P (che fa seguito proprio alle condizioni iniziali precedentemente descritte) sia circolare uniforme di raggio $|\bar{x}|$ con velocità angolare costantemente uguale a $\bar{\omega}$.
- (4) Si riconsideri il sistema precedentemente descritto in condizioni di assenza di gravità; inoltre, si supponga ora che il punto P sia dotato di carica elettrica q ; esso, quindi, subisce anche gli effetti di un campo elettrico uniforme di norma uguale a \mathcal{E} , che è direzionato in modo da essere sempre parallelo ed equiverso al vettore \overrightarrow{OA} .
 - (4a) Si scriva la nuova equazione $\mathcal{P}_2(\bar{x}) = 0$, che deve essere soddisfatta affinché il moto sia circolare uniforme di raggio $|\bar{x}|$, quando il valore di q è determinato in modo tale che le soluzioni di tale equazione siano *simmetriche rispetto all'origine*^[*].
 - (4b) Si determinino esplicitamente i raggi di tutte le possibili orbite circolari di P quando il valore di q è proprio quello richiesto al punto (4a).

[*] Ovviamente, qui si intende che l'insieme $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ delle soluzioni dell'equazione $\mathcal{P}_2(\bar{x}) = 0$ è simmetrico rispetto all'origine, se $\forall j = 1, \dots, n$ avviene che $\mathcal{P}(-\bar{x}_j) = 0$, cioè anche $-\bar{x}_j$ è una soluzione.