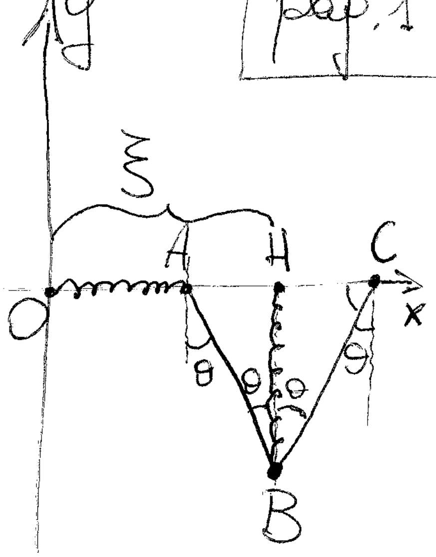
Esame Luglio 2015



aste AB e BC omogenee

$\overline{AB} = \overline{BC} = \ell$

massa asta AB = massa asta BC = m

costante molla tra O e A = k_1

" " " B e H = k_2

---

1) Lagrangiana ed eq. di Lagrange

Scegliamo come coordinate libere o lagrangiane la coppia (ξ, θ)

dove ξ è l'ascissa del punto H e θ è l'angolo che AB forma con la verticale discendente.

Le coordinate di A, B e C in funzione delle coordinate lagrangiane sono

$$A: (\xi - \ell \sin\theta, 0) \qquad B: (\xi, -\ell\cos\theta)$$

$$C: (\xi + \ell\sin\theta, 0)$$

la velocità di un generico punto P a distanza ρ da A e che appartiene all'asta AB è tale che

$$V_P = \left(\dot{\xi} - (\ell-\rho)\dot{\theta}\cos\theta, +\rho\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

Abbiamo quindi che l'energia cinetica dell'asta AB è

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\int_0^\ell \delta \, \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P \, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^\ell \delta \left[\dot{\xi}^2 - 2(\ell-\rho)\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + (\ell-\rho)^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \right] d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{\ell}\left[\ell\dot{\xi}^2 + (\ell-\rho)^2\Big|_0^\ell \dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{3}(\rho-\ell)^3\dot{\theta}^2\cos^2\theta\Big|_0^\ell + \frac{1}{3}\rho^3\dot{\theta}^2\sin^2\theta \right]$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 - m\ell\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\theta}^2$$

, dove abbiamo utilizzato la def. di densità $\delta = m/\ell$.

Analogamente, l'energia cinetica dell'asta BC è

$$T_{BC} = \frac{1}{2}\int_0^\ell \delta \left[\dot{\xi}^2 + 2(\ell-\rho)\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + (\ell-\rho)^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \right] d\rho$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + m\ell\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m\ell^2}{6}\dot{\theta}^2$$

L'energia cinetica totale è quindi

$$T = T_{AB} + T_{BC} = m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Per confronto, facciamo anche il calcolo delle energie cinetiche delle aste, utilizzando il teorema di König:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{\xi} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 - m\ell\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2$$

Analogamente, si ottiene

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m\left[\left(\dot{\xi} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + ml\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2$$

e, di nuovo,

$$T = T_{AB} + T_{BC} = m\dot{\xi}^2 \cancel{ml\dot{\xi}\dot{\theta}\cos\theta} + \frac{1}{3} ml^2\dot{\theta}^2$$

Passiamo ora al calcolo dell'energia potenziale:

$$U = \cancel{2} mg\frac{y_B}{\cancel{2}} + \frac{1}{2}k_1\overline{OA}^2 + \frac{1}{2}k_2\overline{BH}^2$$

$$= -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k_1(\xi - l\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2 l^2\cos^2\theta$$

$$= -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k_1\xi^2 + \frac{1}{2}k_1 l^2\sin^2\theta - k_1 l\xi\sin\theta + \frac{1}{2}k_2 l^2\cos^2\theta$$

La Lagrangiana sarà allora

$$L = m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}k_1\xi^2 - \frac{1}{2}k_1 l^2\sin^2\theta + k_1 l\xi\sin\theta - \frac{1}{2}k_2 l^2\cos^2\theta .$$

le eq. di Lagrange saranno quindi

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\xi}} - \dfrac{\partial L}{\partial\xi} = 2m\ddot{\xi} + k_1\xi + k_1 l\sin\theta = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = \dfrac{2}{3}ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + k_1 l^2\sin\theta\cos\theta + k_1 l\xi\cos\theta - k_2 l^2\sin\theta\cos\theta = 0 \end{cases}$$

2) P.ti di equilibrio e stabilità

Per determinare i p.ti di equilibrio, si deve risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \xi} = k_1 \xi + k_1 \ell \sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta} = mg\ell \sin\vartheta + k_1 \ell^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + k_1 \ell \xi \cos\vartheta - k_2 \ell^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \end{cases}$$

Dalla prima eq. precedente segue che

$$\xi = -\ell \sin\vartheta ,$$

sostituendo ξ nella seconda, abbiamo che

$$\ell\sin\vartheta \left(mg + \cancel{k_1 \ell \cos\vartheta} - \cancel{k_1 \ell \cos\vartheta} - k_2 \ell \cos\vartheta \right) = 0$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\vartheta = 0, \pi$ $\qquad\qquad$ $\vartheta = \pm\beta$ dove $\beta := \arccos \dfrac{mg}{k_2 \ell}$

esiste se e solo se $\dfrac{mg}{k_2 \ell} \leq 1$.

Riassumendo, i p.ti di equilibrio sono

$$(\xi, \vartheta) \in \left\{ (0,0), (0,\pi), (\mp \ell \sin\beta, \pm\beta) \right\}$$

dove l'ultima coppia $\exists$ sse $\dfrac{mg}{k_2 \ell} \leq 1$.

Per studiare la stabilità cominciamo a ~~studiare~~ calcolare l'Hessiano del potenziale:

$$\mathrm{Hess}\, U = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 \ell\cos\theta \\ k_1\ell\cos\theta & mg\ell\cos\theta + k_1\ell^2(2\cos^2\theta - 1) - k_1\ell\xi\sin\theta - k_2\ell^2(2\cos^2\theta-1) \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora i vari casi particolari

- Caso $(\xi, \theta) = (0, 0)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=0}} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1\ell \\ k_1\ell & mg\ell + (k_1 - k_2)\ell^2 \end{pmatrix}$$

che ha come determinante

$$\det \mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \theta=0}} = mgk_1\ell + (\cancel{k_1^2} - k_1k_2)\ell^2 \cancel{- k_1^2\ell^2}$$
$$= k_1\ell(mg - k_2\ell) \gtreqless 0$$

a seconda che $\frac{mg}{k_2\ell} \gtreqless 1$.

Siccome il primo elemento sulla diagonale è positivo (cioè $k_1>0$), allora, quando l'Hessiano è una forma quadratica definita, sarà sicuramente def. positiva. Ne segue che

- Se $\frac{mg}{k_2\ell} > 1 \Rightarrow \det > 0$ (e siccome $k_1 > 0$) $\Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ p.to di equil. <u>STABILE</u>
- se $\frac{mg}{k_2\ell} < 1 \Rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. neg. $\Rightarrow$ p.to di equil. <u>INSTABILE</u>
- se $\frac{mg}{k_2\ell} = 1 \Rightarrow \det = 0$ (e siccome $k_1 > 0$) $\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ servirà un supplemento di indagine

• Caso $(\xi, \vartheta) = (0, \pi)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \vartheta=\pi}} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 \ell \\ -k_1 \ell & -mg\ell + (k_1 - k_2)\ell^2 \end{pmatrix},$$

quindi, $\det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=0\\ \vartheta=\pi}} = -mgk_1\ell - k_1 k_2 \ell^2 + \cancel{k_1^2\ell^2} - \cancel{k_1^2 \ell^2} < 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 autoval. neg.

$\Rightarrow (0, \pi)$ è un p.to di equil. INSTABILE

• Caso $(\xi, \vartheta) = (\mp \ell \sin\beta, \pm\beta)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=\mp\ell\sin\beta\\ \vartheta=\pm\beta}} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 \ell \cos\beta \\ k_1 \ell\cos\beta & mg\ell\cos\beta + (k_1 - k_2)\ell^2(2\cos^2\beta - 1) + k_1 \ell^2 \sin^2\beta \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi calcolare il determinante come segue:

$$\det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\xi=\mp\ell\sin\beta\\ \vartheta=\pm\beta}} = mgk_1\ell\cos\beta + k_1\ell^2(\cancel{2}\cos^2\beta \cancel{-1} \cancel{+1} - \cos^2\beta - \cancel{\cos^2\beta})$$
$$- k_1 k_2 \ell^2 (2\cos^2\beta - 1)$$
$$= k_1 \ell \left[mg \frac{mg}{k_2 \ell} - \cancel{2} k_2 \ell \frac{m^2 g^2}{k_2^2 \ell^2} + k_2 \ell \right]$$
$$= k_1 k_2 \ell \left(1 - \frac{m^2 g^2}{k_2^2 \ell^2} \right)$$

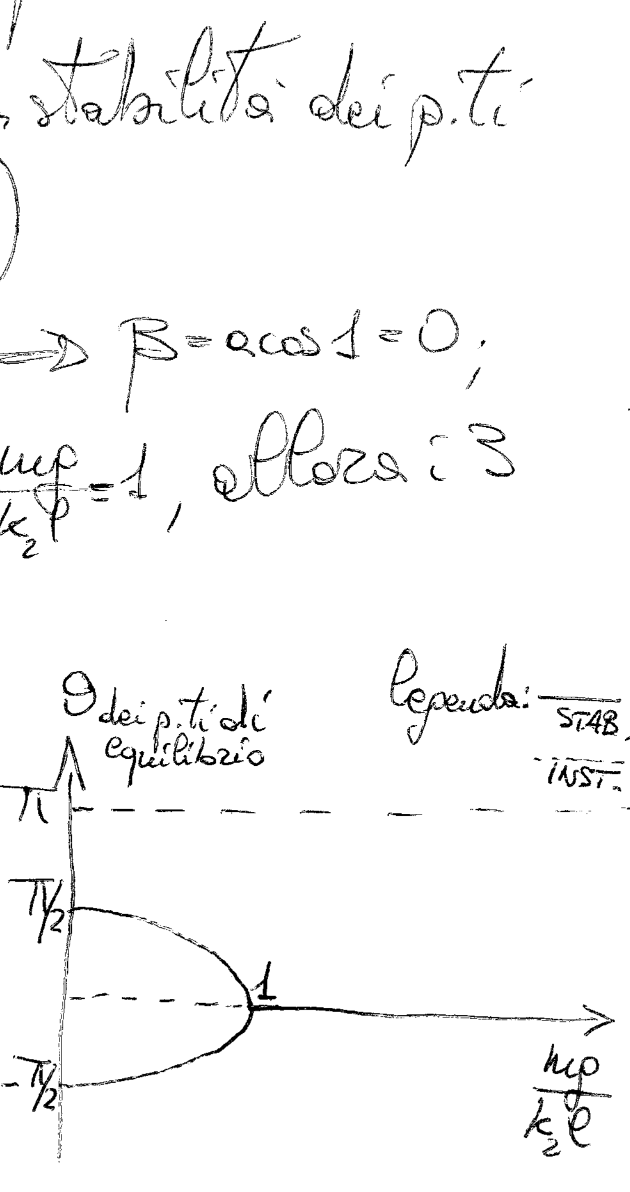
• Se $\frac{mg}{k_2 \ell} < 1$, il determinante è positivo (e siccome $k_1 > 0$)

allora ci sono 2 autoval. pos.
$\Rightarrow$ ~~p~~$(\mp l \sin\beta, \pm\beta)$ sono 2 p.ti di
equilibrio STABILI.

- se $\frac{mg}{k_2 l} = 1$, il determinante è nullo (e siccome $k_1 > 0$) abbiamo 1 autoval. pos. e 1 nullo
  $\Rightarrow$ è necessario un supplemento di indagine
- se $\frac{mg}{k_2 l} < 1$, allora questi due p.ti di equil. $\nexists$, quindi il problema non si pone.

Rimane quindi da capire la stabilità dei p.ti
$$(0,0) \text{ e } (\mp l \sin\beta, \pm\beta)$$
nel caso critico $\frac{mg}{k_2 l} = 1 \Rightarrow \beta = \operatorname{acos} 1 = 0$;
osserviamo quindi che, quando $\frac{mg}{k_2 l} = 1$, allora i 3 p.ti di equilibrio
$$(0,0) \text{ e } (\mp l \sin\beta, \pm\beta)$$
coincidono.

~~Dal~~ Nel grafico qui accanto riconosciamo la classica situazione della biforcazione a forchetta di un p.to di equil. stabile.



Questo ci porta a congetturare che $(0,0)$ sia un p.to di equilibrio STABILE.

Dimostriamolo rigorosamente.

Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \operatorname{unif}_{\vartheta\in T} U(\xi,\vartheta)=+\infty,$$

di conseguenza il potenziale $U: \mathbb{R}\times T \to \mathbb{R}$ deve avere un p.to di minimo "al finito". Essendo U derivabile quanto si vuole, allora il p.to di minimo sarà in corrispondenza a un p.to stazionario.

I p.ti stazionari, nel caso $\frac{mg}{k_2 \ell}=1$, sono solo 2:

$$(\xi,\vartheta)=(0,\pi) \quad \text{che è un p.to di sella}$$

$$\text{e} \quad (\xi,\vartheta)=(0,0) \quad \text{che non può che essere p.to di minimo.}$$

Per il teorema di Lagrange-Dirichlet, allora, $(0,0)$ è p.to di equilibrio STABILE quando $\frac{mg}{k_2 \ell}=1$.

3) Si supponga ora che la prima molla sia assente (cioè $k_1 = 0$).

3a) Si determinino gli integrali primi

Quando $k_1 = 0$, la Lagrangiana diventa

$$L = m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{3} m l^2 \dot{\vartheta}^2 + mgl\cos\vartheta - \frac{1}{2} k_2 l^2 \cancel{\sin^2\vartheta} \cos^2\vartheta .$$

È evidente che la Lagrangiana non dipende più dalla variabile ξ, quindi

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$$ (dove abbiamo utilizzato la prima delle eq. di Lagrange),

cioè $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = 2m\dot{\xi}$ è una costante del moto.

Non è strano che $2m\dot{\xi}$ sia una costante del moto; si osservi, infatti che il sistema ~~da~~ costituito dalle due aste non è soggetto ad alcuna forza orizzontale esterna, per la prima eq. cardinale della dinamica, allora, si ha che la velocità orizzontale del baricentro è uniforme, cioè la componente orizzontale della quantità di moto totale $2m\dot{\xi}$ è una costante del moto.

Inoltre, siccome la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, allora si conserva anche l'energia totale

$$E = m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{3}ml^2\dot{\vartheta}^2 - mgl\cos\vartheta + \frac{1}{2}kl^2\cos^2\vartheta.$$

Si noti che, siccome (per quanto discusso nella pagina precedente) si ha che $\dot{\xi}$ è costante, allora anche la sola sotto parte dell'energia che dipende da ϑ e $\dot{\vartheta}$ è a sua volta una costante del moto (non indipendente da E e $2m\dot{\xi}$).

3b) Limitatamente al caso $kl = mg/50$, si studi il moto che fa seguito a delle condizioni iniziali tali che al tempo $t=0$ il triangolo ABC è equilatero con il vertice B al di sotto dell'asse delle ascisse e velocità nulle delle aste. Si dia una stima T del periodo del moto, determinando 2 valori positivi T_- e T_+ tali che

$$T_- \leq T \leq T_+$$

con errore relativo sulla stima che sia inferiore al 50%.

Siccome la velocità iniziale delle due aste è nulla, allora in particolare anche la vel. orizzontale iniziale di tutti i p.ti (compreso B, la cui ascissa è ξ) è nulla, quindi

$$2m\dot{\xi} = 0$$

(siccome è cost. del moto, basta valutarla al tempo $t=0$).

Ne segue che $\dot{\xi} = 0$ e quindi

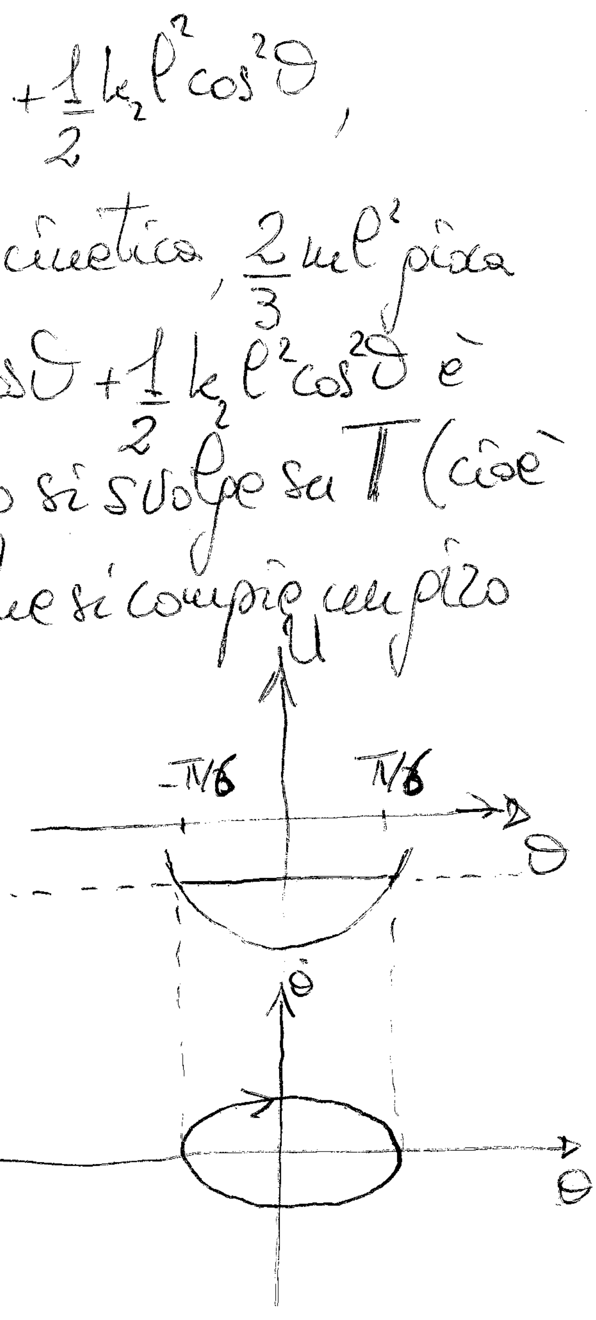
$$\xi(t) = \xi(0),$$

cioè l'ascissa del baricentro rimarrà costantemente uguale al suo valore iniziale, durante tutto il moto.

Cerchiamo ora di comprendere come si comporta il moto dell'angolo θ; a questo scopo possiamo studiare il problema meccanico 1-dimensionale, ~~dove~~ t.c. si conserva l'energia

$$E = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta^2 - mgl\cos\theta + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2\theta,$$

dove $T = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta^2$ è l'energia cinetica, $\frac{2}{3} m l^2$ gioca il ruolo della massa, $U = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2} k_2 l^2 \cos^2\theta$ è l'energia potenziale e il moto si svolge su $\mathbb{T}$ (cioè θ è un angolo e cioè, ogni volta che si compie un giro di 2π si torna al p.to iniziale).



Osserviamo che $U : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ è una funzione pari. Inoltre,

$$U' = mgl\sin\theta + k_2 l^2 \sin\theta\cos\theta$$
$$= mgl\sin\theta\left(1 + \frac{\cos\theta}{50}\right)$$

cresce per $\theta \in [0, \pi/6]$ e decresce per $\theta \in [-\pi/6, 0]$.

Dal grafico del potenziale e del ritratto in fase, segue immediatamente che il moto che fa seguito a $\vartheta = \pi/6$, $\dot{\vartheta} = 0$ (cioè le condizioni iniziali corrispondenti al testo) è periodico con oscillazioni nell'intervallo $[-\pi/6, \pi/6]$.

Proviamo a determinare T_- e T_+ in modo tale che

$$T_- = 2\pi \sqrt{\frac{2/3\, m\ell^2}{\max\limits_{\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} U''(\vartheta)}}$$

e

$$T_+ = 2\pi \sqrt{\frac{2/3\, m\ell^2}{\min\limits_{\vartheta\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} U''(\vartheta)}}$$

Calcoliamo allora la derivata seconda

$$U'' = mg\ell \cos\vartheta + k_2 \ell^2 \cos 2\vartheta$$

e (per ~~calcolare~~ determinare minimi e massimi di U'') la derivata terza

$$U''' = -mg\ell\, \cancel{\cos}\, \sin\vartheta - 2k_2 \ell^2 \sin 2\vartheta$$

$$= -mg\ell \sin\vartheta \left(1 + \frac{4^2}{50_{25}} \cos\vartheta\right)$$

Siccome il secondo fattore di U''' è sempre positivo, allora è evidente che U'' <u>cresce per $\vartheta \in [-\pi, 0]$</u> e decresce per $\vartheta \in [0, \pi]$. Di conseguenza, abbiamo che

$$\max_{\vartheta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]} U''(\vartheta) = U''(0),$$

mentre $\min_{\vartheta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]} U''(\vartheta) = U''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (dove abbiamo sfruttato la parità della funzione U).

Possiamo quindi concludere che

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{2/3\, m\ell^{2}}{mg\ell\left(1+\frac{1}{50}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}\sqrt{\frac{50}{51}},$$

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{2/3\, m\ell^{2}}{mg\ell\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{100}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}\sqrt{\frac{100}{50\sqrt{3}+1}}$$

L'errore relativo sulla stima sarà

$$\frac{T_+ - T_-}{2T_-} = \frac{\sqrt{\frac{100}{50\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{50}{51}}}{2\sqrt{\frac{50}{51}}} \simeq 4\%.$$

A scanso di equivoci riportiamo qui di seguito la figura corrispondente alle condizioni iniziali.