

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
23 Luglio 2015

Un sistema meccanico è costituito da due aste rigide, che hanno densità di massa omogenea al loro interno e si muovono in un piano verticale Oxy . Entrambe le aste sono di massa m e lunghezza l . Esse sono vincolate in modo tale da avere un estremo (che d'ora in avanti denotiamo con B) in comune. Ciascun altro estremo delle due aste (siano essi, rispettivamente, A e C) è obbligato a muoversi in modo tale che il triangolo isoscele di vertici A , B e C abbia sempre la base AC (la cui lunghezza può variare) sull'asse orizzontale delle x . Il vertice A è collegato all'origine mediante una molla ideale di costante elastica $k_1 > 0$; B è invece collegato alla sua proiezione H sull'asse delle x , mediante un'altra molla ideale di costante elastica $k_2 > 0$; entrambe le molle sono di lunghezza a riposo nulla. I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il loro moto, le aste si possano attraversare senza scontrarsi. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità.
- (3) Si supponga ora che la prima molla sia assente (o, equivalentemente, si ponga $k_1 = 0$).
 - (3a) Si determinino gli integrali primi del sistema, dando giustificazione del fatto che essi sono effettivamente costanti del moto.
 - (3b) Limitatamente al caso in cui $k_2 l = mg/50$, si studi il moto che fa seguito a delle condizioni iniziali tali che al tempo $t = 0$ il triangolo ABC è equilatero con il vertice B al di sotto dell'asse delle ascisse e velocità nulle delle aste. Sia T il minimo istante di tempo positivo in cui il sistema riassume la configurazione iniziale. Si dia una stima del periodo T determinando esplicitamente due valori reali positivi T_- e T_+ tali che

$$T_- \leq T \leq T_+$$

con un errore relativo sulla stima che sia inferiore al 50%.