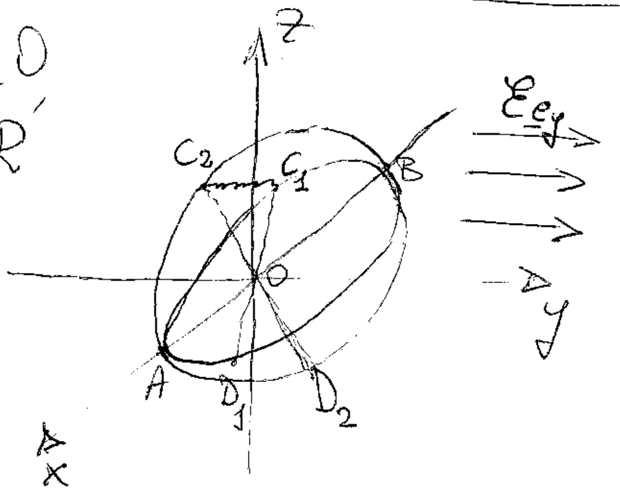
Esame di Giugno 2015

Anello 1 e Anello 2: con centro in O
entrambi omogenei, di raggio R
e con un diametro AB.



$A \in$ semiasse positivo delle x
$B \in$ " negativo delle x.

massa Anello 1 = massa Anello 2 = M.

$C_1 D_1$ diametro del primo anello, $C_1 D_1 \perp AB$
$C_2 D_2$ " " secondo " , $C_2 D_2 \perp AB$

molla tra C_1 e C_2 di costante k.

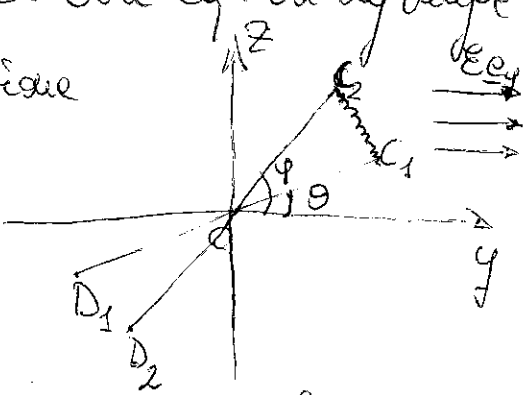
Carica elettrica in $C_1 = q > 0$ Campo elettrico $\mathcal{E} \underline{e}_y$
" " " $C_2 = q > 0$

costante

---

1) Calcolo della Lagrangiana e delle eq. di Lagrange.

È conveniente riferirsi alla proiezione dei 2 anelli sul piano Oyz (cui appartengono i p.ti C_1, C_2, D_1 e D_2).



Assumiamo come coordinate libere o lagrangiane gli angoli θ e φ descritti in figura.

Coordinate C_1: $(0, R\cos\theta, R\sin\theta)$

" C_2: $(0, R\cos\varphi, R\sin\varphi)$

Per calcolare l'energia cinetica dobbiamo trovare I t.c.

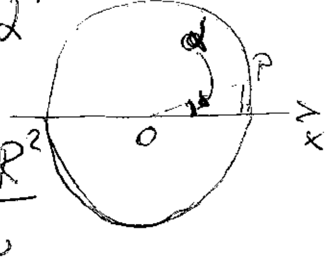
$$T = \frac{1}{2} I \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)$$

dove I altro non è che l'inerzia dell'anello rispetto all'asse di rotazione (cioè l'asse x), quindi

$$I = \delta \int_0^{2\pi} R\,d\alpha\, R^2 \sin^2\alpha = \frac{MR^{\cancel{3}2}}{2\pi \cancel{R}} \int_0^{2\pi} d\alpha \sin^2\alpha$$

$$= \frac{MR^2}{2\cancel{\pi}}\cancel{\pi} = \frac{MR^2}{2}$$

densità lineare di massa dell'anello



$$\Longrightarrow T = \frac{1}{4} MR^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\right).$$

Scriviamo una prima espressione del potenziale

$$U = \frac{1}{2} k \overline{C_1C_2}^2 - q\mathcal{E} y_{C_1} - q\mathcal{E} y_{C_2},$$

che adesso dobbiamo riesprimere in funzione delle coordinate lagrangiane.

Osserviamo che

$$\overline{C_1C_2}^2 = R^2\left[(\cos\vartheta - \cos\varphi)^2 + (\sin\vartheta - \sin\varphi)^2\right]$$

$$= R^2\left(\cos^2\vartheta + \cos^2\varphi - 2\cos\vartheta\cos\varphi + \sin^2\vartheta + \sin^2\varphi - 2\sin\vartheta\sin\varphi\right)$$

$$= R^2\left[2 - 2\cos(\vartheta - \varphi)\right],$$

$$y_{C_1} = R\cos\vartheta, \quad y_{C_2} = R\cos\varphi.$$

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}kR^2\cos(\vartheta-\varphi) - q\mathcal{E}R(\cos\vartheta+\cos\varphi),$$

dove abbiamo omesso una costante additiva che non ha alcuna influenza sulla dinamica.
Possiamo finalmente scrivere la lagrangiana

$$L = \frac{1}{4}MR^2(\dot\vartheta^2+\dot\varphi^2) + \frac{1}{2}kR^2\cos(\vartheta-\varphi) + q\mathcal{E}R(\cos\vartheta+\cos\varphi)$$

e le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} - \dfrac{\partial L}{\partial\vartheta} = \dfrac{MR^2}{2}\ddot\vartheta + kR^2\sin(\vartheta-\varphi) + q\mathcal{E}R\sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = \dfrac{MR^2}{2}\ddot\varphi + kR^2\sin(\varphi-\vartheta) + q\mathcal{E}R\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

---

2) Si determinino i p.ti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Cominciamo a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} = kR^2\sin(\vartheta-\varphi) + q\mathcal{E}R\sin\vartheta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} = kR^2\sin(\varphi-\vartheta) + q\mathcal{E}R\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro le 2 eq. precedenti, otteniamo $q\mathcal{E}R\sin\vartheta + q\mathcal{E}R\sin\varphi = 0$

$$\Rightarrow \sin\vartheta = -\sin\varphi \quad \begin{matrix} \nearrow \vartheta = -\varphi \\ \searrow \vartheta = \varphi+\pi \end{matrix}$$

Introduciamo la relazione

$$\vartheta = -\varphi$$

nella 2ª eq., in modo da ottenere un'eq. nella sola incognita φ:

$$kR^2 \sin 2\varphi + qER \sin\varphi = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2kR^2 \sin\varphi \left(\cos\varphi + \frac{qE}{2kR}\right) = 0$$

$$\varphi = 0, \pi \qquad\qquad \varphi = \pm\beta \quad \text{con } \beta := \operatorname{acos}\left(\frac{-qE}{2kR}\right)$$

corrispondentemente $\Downarrow$ $\vartheta = 0, \pi$ corrispondentemente $\Downarrow$ $\vartheta = \mp\beta$ purché $\frac{qE}{2kR} \leq 1$

~~Ad~~

Introduciamo ora la relazione

$$\vartheta = \varphi + \pi$$

nella 2ª eq. e otteniamo

$$qER \sin\varphi = 0 \longrightarrow \varphi = 0, \pi \xRightarrow{\text{corrispondentemente}} \vartheta = \pi, 0$$

Riassumendo, i p.ti di equilibrio sono

$$(\vartheta, \varphi) = \{(0,0), (\pi,\pi), (0,\pi), (\pi,0), (\beta,-\beta), (-\beta,\beta)\}$$

dove l'ultima coppia di p.ti di equilibrio $\exists$ sse $\frac{qE}{2kR} \leq 1$.

Al fine di discutere la stabilità, occorre calcolare preliminarmente l'Hessiano del potenziale:

$$\mathrm{Hess}\, U = \begin{pmatrix} kR^2\cos(\vartheta-\varphi)+q\mathcal{E}R\cos\vartheta & -kR^2\cos(\vartheta-\varphi) \\ -kR^2\cos(\vartheta-\varphi) & kR^2\cos(\varphi-\vartheta)+q\mathcal{E}R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Distinguiamo ora i vari casi corrispondenti ai p.ti di equilibrio -

• Caso $(\vartheta,\varphi)=(0,0)$

$$\begin{pmatrix} kR^2+q\mathcal{E}R & -kR^2 \\ -kR^2 & kR^2+q\mathcal{E}R \end{pmatrix} = \mathrm{Hess}\, U\Big|_{(\vartheta,\varphi)=(0,0)}$$

$$\det \mathrm{Hess}\, U = (kR^2+q\mathcal{E}R)^2-(kR^2)^2 = 2kq\mathcal{E}R^3+q^2\mathcal{E}^2R^2>0$$

$$\mathrm{Tr}\, \mathrm{Hess}\, U = 2(kR^2+q\mathcal{E}R)>0,$$

quindi abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow (0,0)$ è STABILE

• Caso $(\vartheta,\varphi)=(\pi,\pi)$

$$\begin{pmatrix} kR^2-q\mathcal{E}R & -kR^2 \\ -kR^2 & kR^2-q\mathcal{E}R \end{pmatrix} = \mathrm{Hess}\, U\Big|_{(\vartheta,\varphi)=(\pi,\pi)}$$

$$\det \mathrm{Hess}\, U = (kR^2-q\mathcal{E}R)^2-k^2R^4 = -2kq\mathcal{E}R^3+q^2\mathcal{E}^2R^2$$
$$= 2kq\mathcal{E}R^3\left(-1+\frac{q\mathcal{E}}{2kR}\right)$$

Se $\frac{q\mathcal{E}}{2kR}<1 \Rightarrow \det \mathrm{Hess}\, U<0 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 " neg.

(π,π) è INSTABILE

~~Caso~~ Se $\frac{q\mathcal{E}}{2kR} = 1 \Longrightarrow \det \text{Hess} = 0$ e

$$\text{Tr Hess } U = 2R(kR - q\mathcal{E}) = -2kR^2 < 0$$

$\Longrightarrow$ 1 autoval. nullo e 1 autoval. neg.

$\Longrightarrow (\pi,\pi)$ è <u>INSTABILE</u>.

Se $\frac{q\mathcal{E}}{2kR} > 1 \longrightarrow \det \text{Hess} > 0$

$$\text{Tr Hess } U = 2R(kR - q\mathcal{E}) < 2R\underbrace{(kR - 2kR)}_{}=-2kR^2$$

$\Longrightarrow \det \text{Hess} > 0$ e $\text{Tr Hess } U < 0$

$\Longrightarrow$ 2 autoval. neg. $\Longrightarrow (\pi,\pi)$ è <u>INSTABILE</u>

• <u>Caso $(\theta,\varphi) = (0,\pi)$</u>

$$\begin{pmatrix} -kR^2 + q\mathcal{E}R & kR^2 \\ kR^2 & -kR^2 - q\mathcal{E}R \end{pmatrix} = \text{Hess } U\Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=\pi}}$$

$$\det \text{Hess } U = \cancel{k^2R^4} - q^2\mathcal{E}^2R^2 - \cancel{k^2R^4} = -q^2\mathcal{E}^2R^2 < 0$$

$\longrightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg. $\longrightarrow (0,\pi)$ è <u>INSTABILE</u>

• Caso $(\theta,\varphi) = (\pi,0)$ (è analogo a quello precedente)

$$\text{Hess } U\Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} -kR^2 - q\mathcal{E}R & kR^2 \\ kR^2 & -kR^2 + q\mathcal{E}R \end{pmatrix}$$

Di nuovo abbiamo che $\det \text{Hess}\, U =$
$= -q^2 \mathcal{E}^2 R^2 < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg.
$\Rightarrow (\pi, 0)$ è <u>INSTABILE</u>

- Casi $(\theta, \varphi) = (\pm \beta, \mp \beta)$

$$\text{Hess}\, U \Big|_{\substack{\theta = \pm\beta \\ \varphi = \mp \beta}} = \begin{pmatrix} kR^2 \cos 2\beta + q\mathcal{E}R\cos\beta & -kR^2\cos 2\beta \\ -kR^2 \cos 2\beta & kR^2\cos 2\beta + q\mathcal{E}R\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess}\, U = (kR^2\cos 2\beta + q\mathcal{E}R\cos\beta)^2 - k^2R^4\cos^2 2\beta$$
$$= 2kq\mathcal{E}R^3 \cos 2\beta \cos\beta + q^2\mathcal{E}^2R^2\cos^2\beta,$$

osserviamo che $\cos\beta = -\dfrac{q\mathcal{E}}{2kR} \leq 0$ e

$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \dfrac{q^2\mathcal{E}^2}{4k^2R^2} - 1 \leq 0$, perché questi pti di equil. $\exists$ sse $\dfrac{q\mathcal{E}}{2kR} \leq 1$, quindi

$$\cos 2\beta \cdot \cos\beta \geq 0$$

$\Rightarrow \det \text{Hess}\, U \geq 0$ perché somma di 2 addendi positivi o nulli.

$\text{Tr}\, \text{Hess}\, U = 2kR^2\cos 2\beta + q\mathcal{E}R\cos\beta =$, usando ancora l'osservazione precedente,

$$2kR^2\left(\frac{q^2\mathcal{E}^2}{4k^2R^2} - 1\right) + q\mathcal{E}R\left(-\frac{q\mathcal{E}}{2kR}\right) < 0$$

Siccome abbiamo che
$\det \mathrm{Hess}\, U \geq 0$ e $\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess} < 0$,
allora abbiamo o 2 autovalori negativi
oppure 1 neg. e 1 nullo $\Longrightarrow (\pm\beta, \mp\beta)$ è un
p.to di equilibrio <u>INSTABILE</u>.

---

3) Si verifichi che esistono ~~soluzioni~~ moti
t.c. a) i 2 anelli si muovono stando
costantemente sovrapposti l'uno
all'altro;
b) i 2 anelli si muovono in modo
da essere costantemente simmetrici
rispetto al piano verticale Oyz.

In entrambi i casi si calcoli il periodo delle
piccole oscillazioni attorno al p.to di equilibrio
stabile.

Nel caso a, se $\vartheta(t) = \varphi(t)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, abbiamo che le
eq. di Lagrange diventano

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\vartheta} + qER\sin\vartheta = 0 \quad \text{e} \quad MR^2\varphi + qER\sin\varphi = 0,$$

Cioè le eq. in ϑ e in φ sono uguali tra loro.

Per problemi di Cauchy t.c.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}MR\ddot{\vartheta} + qER\sin\vartheta = 0 \\ \vartheta(0) = \alpha \\ \dot{\vartheta}(0) = \omega_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}MR\ddot{\varphi} + qER\sin\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \alpha \\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \end{cases}$$

la soluzione di entrambi $\exists$ e sarà t.c. $\vartheta(t) = \varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, ma allora le eq. di Lagrange, con le cond. di Cauchy

$$\begin{cases} \vartheta(0) = \varphi(0) = \alpha \\ \dot{\vartheta}(0) = \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \end{cases}$$

costituiscono un problema di Cauchy di cui la legge del moto $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi(t))$ è soluzione e (grazie alla regolarità del problema) in quanto tale, è l'unica soluzione di quel prob. di Cauchy.

Abbiamo quindi verificato che esistono dei moti $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi(t) = \vartheta(t))$.

Calcoliamo ora i periodi per questo tipo di moti.

Come abbiamo visto in precedenza, il moto è regolato dall'eq. diff. (in una sola incognita!):

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\vartheta} + qER\sin\vartheta = 0$$

che possiamo vedere come un problema meccanico 1-D, dove si conserva l'energia $\frac{1}{4}MR^2\dot{\vartheta}^2 - qER\cos\vartheta = E$

Nella precedente legge di conservazione distinguiamo l'energia cinetica $T = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\vartheta}^2$ e quella potenziale $U = -qER\cos\vartheta$.
Abbiamo quindi un problema ~~simile~~ del tipo del pendolo, per cui $\vartheta = 0$ $(\varphi = 0)$ è p.to di equilibrio stabile (in accordo con quanto ottenuto al precedente punto 2).
E' ben noto che il periodo delle piccole oscillazioni è dato da ~~T/A~~

$$\lim_{E \to -qER^+} T(E) = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2}{U''(0)}} = 2\pi \sqrt{\frac{M\cancel{R^2}}{2qE\cancel{R}}}$$

Per quanto riguarda il caso b, osserviamo che se $\vartheta(t) = -\varphi(t)$, abbiamo che le eq. di Lagrange diventano

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\vartheta} + kR^2\sin 2\vartheta + qER\sin\vartheta = 0$$

e

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} + kR^2\sin 2\varphi + qER\sin\varphi = 0$$

Cioè anche in questo caso le eq. sono le stesse ed entrambe ammettono soluzioni t.c. $\vartheta(t) = -\vartheta(t)$ se $t \mapsto \vartheta(t)$ è una soluzione (e lo stesso avviene sostituendo φ a ϑ).
Consideriamo la seguente coppia di problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{MR^2}{2}\ddot{\vartheta} + kR^2\sin 2\vartheta + qER\sin\vartheta = 0 \\ \vartheta(0) = \alpha \qquad \dot{\vartheta}(0) = \omega_0 \end{cases}$$

e $\begin{cases} \frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} + kR^2 \sin 2\varphi + qER\sin\varphi = 0 \\ \varphi(0) = -\alpha \qquad \dot{\varphi}(0) = -\omega_0 \end{cases}$

Possiamo applicare ad entrambi ~~il~~ problemi di Cauchy il teorema di esistenza (e unicità) delle soluzioni quindi ~~siano~~ $t \mapsto \vartheta(t)$ e $t \mapsto \varphi(t)$ ~~queste~~ due soluzioni ~~la prima~~ che risolvono rispettivamente i problemi di Cauchy. Si osserva che $-\vartheta(t)$ risolve anche il secondo problema di Cauchy, quindi (per l'unicità della soluzione)

$$\varphi(t) = -\vartheta(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Possiamo quindi scrivere che $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi(t) = -\vartheta(t))$ è ~~la~~ soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{MR^2}{2}\ddot{\vartheta} + kR^2\sin(\vartheta - \varphi) + qER\sin\vartheta = 0 \\ \frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} + kR^2\sin(\varphi - \vartheta) + qER\sin\varphi = 0 \\ \vartheta(0) = \alpha \qquad \dot{\vartheta}(0) = \omega_0 \\ \varphi(0) = -\alpha \qquad \dot{\varphi}(0) = -\omega_0 \end{cases}$$

Per il teorema di (esistenza e) unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi(t) = -\vartheta(t))$ è l'unica soluzione di quel problema.
Anche in questo caso ci siamo ricondotti a un

problema di meccanica 1-D, in cui si conserva l'energia

$$\frac{1}{4}MR^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\cos 2\vartheta - qER\cos\vartheta = E$$

Le piccole oscillazioni attorno al p.to di equilibrio $(\vartheta,\varphi)=(0,0)$ avranno quindi come periodo limite

$$\lim_{E\to\left(-\frac{1}{2}kR^2-qER\right)^+} T(E) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2}{2kR^2+qER}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR}{4kR+2qE}}$$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(-\frac{1}{2}kR^2\cos 2\vartheta - qER\cos\vartheta\right)\Bigg|_{\vartheta=0} = 2kR^2+qER$$