

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
30 Giugno 2015

Un sistema meccanico è costituito da due anelli rigidi che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale. Gli anelli sono entrambi di spessore infinitesimo, di raggio R e di massa M . Inoltre, essi sono tali che la densità di massa al loro interno è omogenea e sono vincolati in modo da poter ruotare attorno al loro comune diametro AB , che giace sull'asse delle x e ha il punto medio coincidente con l'origine O . Siano C_1D_1 e C_2D_2 i diametri ortogonali ad AB e appartenenti, rispettivamente, al primo e al secondo anello. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega tra loro i punti C_1 e C_2 . Questi ultimi due punti C_1 e C_2 sono entrambi dotati di carica elettrica q e subiscono anche gli effetti di un campo elettrico uniforme di norma uguale a \mathcal{E} , parallelo ed equiverso all'asse y . È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero R , M , k , q e \mathcal{E} , abbiano valori reali positivi.

I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il loro moto, i due anelli si possono attraversare senza scontrarsi. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3A) Si supponga che al tempo iniziale $t = 0$ i due anelli siano sovrapposti l'uno all'altro ed entrambi abbiano velocità iniziale nulla.
Si descriva la soluzione delle equazioni di Lagrange che fa seguito alle suddette condizioni iniziali e si determini il/i periodo/i del moto nel limite di piccole oscillazioni attorno al/ai punto/i di equilibrio stabile/i.
- (3B) Si supponga ora che al tempo $t = 0$ i due anelli siano inizialmente posti in una posizione speculare rispetto al piano orizzontale Oxy , in modo tale che la molla (che collega i punti C_1 e C_2) stia in verticale all'istante $t = 0$; inoltre, si assuma che entrambi gli anelli abbiano velocità iniziale nulla.
Si descriva la soluzione delle equazioni di Lagrange che fa seguito alle suddette condizioni iniziali e si determini il/i periodo/i del moto nel limite di piccole oscillazioni attorno al/ai punto/i di equilibrio stabile/i.