

$OQ = R$  , raggio disco  $= r$

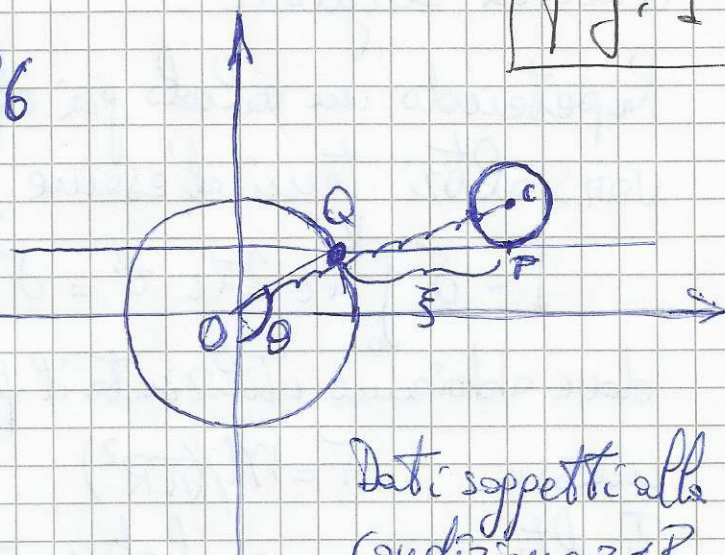
massa guida, <sup>rettilinea</sup> trascurabile

massa  $\Delta$  trascurabile

massa disco  $= m$

Il disco rotola senza strisciare sulla guida.

Rolla tra  $O$  e  $C$  di costante elastica uguale a  $k$ .



Dati supposti alla condizione  $r \ll R$

### (1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange

Scegliamo le coordinate  $(\theta, \xi)$  come coordinate libere, dove  $\theta$  è l'angolo tra  $OQ$  e la verticale discendente, mentre  $\xi$  è l'ascissa del punto  $P$  (di contatto tra il disco e la guida) <sup>riferita all'origine</sup> nel punto  $Q$  (in cui è ancorata la guida).

Determiniamo le coordinate di alcuni punti del sistema:  $Q \rightarrow (R \sin \theta, -R \cos \theta)$

$P \rightarrow (R \sin \theta + \xi, -R \cos \theta)$   $C \rightarrow (R \sin \theta + \xi, -R \cos \theta + r)$

L'unico oggetto del sistema che è dotato di massa è il disco, del bisogno quindi calcolarne la sua energia cinetica, che è  $T = \frac{1}{2} m \underline{v}_C \cdot \underline{v}_C + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$ , dove  $I$  è l'inerzia rispetto alle rotazioni attorno a un'asse normale al piano del disegno e passante per  $C$ , mentre  $\varphi$  è la corrispondente



velocità angolare.

pag. 2

Ripetendo un calcolo più effettuato nella soluzione di vari altri temi d'esame, otteniamo

$$I = \delta \int_0^R dP 2\pi P^3 = 2\pi \delta \int_0^R P^3 dP = 2\pi \delta \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \pi \delta R^4 = \frac{1}{2} m R^2,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che la densità superficiale di massa è  $\delta = m / (\pi R^2)$ .

Inoltre, siccome il disco rotola senza strisciare rispetto alla guida che è incomunicata in Q, sussiste la seguente relazione:

$$|z \dot{\varphi}| = |\dot{\xi}| \quad (\text{si osserva che, se } \xi = 0, \text{ il p.to di contatto è sempre in Q, dove la guida non si muove, quindi è corretto che } 0 = z\dot{\varphi} = \dot{\xi}).$$

Il calcolo di  $\underline{v}_c$  è automatico:

$$\underline{v}_c = (R\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\xi}, R\dot{\theta} \sin \theta), \text{ ne segue che}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (R\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\xi})^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{4} m \frac{R^2}{z^2} \dot{\xi}^2 \\ &= \frac{1}{4} m (2R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2R\dot{\xi}\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\xi}^2 + \cancel{2R\dot{\theta}\dot{\xi} \sin \theta} + \dot{\xi}^2) \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m R \dot{\xi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{3}{4} m \dot{\xi}^2 \end{aligned}$$

Procediamo ora con il calcolo del potenziale:

$$\begin{aligned} U &= m g y_c + \frac{1}{2} k \overline{OC}^2 = m g (-R \cos \theta + z) + \frac{1}{2} k (R \sin \theta + \xi)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} k (-R \cos \theta + z)^2 = -m g R \cos \theta + m g z + \frac{1}{2} k (R^2 \sin^2 \theta + 2R\xi \sin \theta + \xi^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} k (R^2 \cos^2 \theta - 2zR \cos \theta + z^2) \end{aligned}$$

Omettendo le costanti additive possiamo scrivere

$$U = -m g R \cos \theta + \frac{1}{2} k \xi^2 + k R \xi \sin \theta - k z R \cos \theta.$$



Siamo ora in condizione di scrivere la lagrangiana: / pag. 3

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m R \dot{\xi} \dot{\theta} \cos \theta + \cancel{m R \dot{\xi} \dot{\theta} \sin \theta} + \frac{3}{2} m \dot{\xi}^2 + m g R \cos \theta - \frac{1}{2} k \xi^2 - k R \xi \sin \theta + k z R \cos \theta$$

e le eq. di lagrange

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m R^2 \ddot{\theta} + m R \ddot{\xi} \cos \theta - \cancel{m R \dot{\xi} \dot{\theta} \sin \theta} \\ &\quad + \cancel{m R \dot{\xi} \dot{\theta} \sin \theta} + m g R \sin \theta + k R \xi \cos \theta \\ &\quad + k z R \sin \theta = \\ &= m R^2 \ddot{\theta} + m R \ddot{\xi} \cos \theta + m g R \sin \theta + k z R \sin \theta \\ &\quad + k R \xi \cos \theta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} &= m R \ddot{\theta} \cos \theta - \cancel{m R \dot{\theta}^2 \sin \theta} + \frac{3}{2} m \ddot{\xi} \\ &\quad + k(\xi + R \sin \theta) = 0 \end{aligned} \right.$$

2) Studio dei p.ti di equilibrio e della loro stabilità

Per determinare i p.ti di equilibrio bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= (m g + k z) R \sin \theta + k R \xi \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= k(\xi + R \sin \theta) = 0 \end{aligned} \right.$$

Dalla 2<sup>a</sup> eq. segue  $\boxed{\xi = -R \sin \theta}$

Andando a sostituire nella prima eq. si trova

$$[(m g + k z) - k R \cos \theta] R \sin \theta = 0, \text{ che è un'eq. nella sola}$$



incognita  $\vartheta$ .

Abbiamo che

$$R \sin \vartheta \cdot [(mg + kz) - kR \cos \vartheta] = 0$$

$$\vartheta = 0, \pi$$

$$kR \cos \vartheta = mg + kz$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \frac{mg + kz}{kR}$$

$$\Rightarrow \vartheta = \pm \beta \text{ dove } \beta = \arccos\left(\frac{mg + kz}{kR}\right)$$

perché  $\frac{mg + kz}{kR} \leq 1 \Rightarrow \frac{mg + kz}{k} \leq R$

Corrispondentemente, abbiamo che quando  $\vartheta = 0$ ,  $\xi = -R \sin \vartheta = 0$

$$'' \quad \vartheta = \pi, \quad \xi = 0$$

$$'' \quad \vartheta = \beta, \quad \xi = -R \sin \beta$$

$$'' \quad \vartheta = -\beta, \quad \xi = R \sin \beta$$

Riassumendo i p.t.i di equilibrio sono

$$(\vartheta, \xi) \in \left\{ (0, 0), (\pi, 0), (\beta, -R \sin \beta), (-\beta, R \sin \beta) \right\},$$

dove l'ultima coppia <sup>p.t.i di</sup> di equilibrio esiste solo sotto la condizione (necessaria di ~~esistenza~~)  $\frac{mg + kz}{kR} \leq 1$ .

Al fine di studiare la stabilità dei suddetti p.t.i di equilibrio è conveniente calcolare l'Hessiano del potenziale:

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} (mg + kz)R \cos \vartheta - kR\xi \sin \vartheta & kR \cos \vartheta \\ kR \cos \vartheta & k \end{pmatrix}$$

Passiamo ora a studiare il segno degli autovalori nei vari casi.



• Caso  $(\theta, \xi) = (0, 0)$

pag. 5

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \xi=0}} = \begin{pmatrix} (m_g + k_z)R & kR \\ kR & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \xi=0}} = [(m_g + k_z) - kR] \cdot kR$$

$$\Rightarrow \left[ \text{Se } \frac{m_g + k_z}{kR} < 1 \right] \text{ allora } \det < 0 \Rightarrow 1 \text{ autoval.}$$

pos. e 1 neg.  $\Rightarrow (0, 0)$  è un p.to di eq. **INSTABILE**

$$\Rightarrow \left[ \text{Se } \frac{m_g + k_z}{kR} > 1 \right] \text{ allora } \det > 0 \text{ e, siccome}$$

un el. sulla diagonale (cioè  $k$ ) è sicuramente positivo, allora abbiamo 2 autoval. pos.  $\Rightarrow$  p.to di eq.

**STABILE**

$$\Rightarrow \left[ \text{Se } \frac{m_g + k_z}{kR} = 1 \right] \text{ allora } \det = 0 \text{ e, siccome un}$$

el. sulla diag. è positivo,  $\Rightarrow 1$  autoval. pos. e 1 nullo

$\Rightarrow$  occorre un **supplemento di indagine**

• Caso  $(\theta, \xi) = (\pi, 0)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \xi=0}} = \begin{pmatrix} -(m_g + k_z)R & -kR \\ -kR & k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \xi=0}} = -[(m_g + k_z) + kR] kR < 0$$

$\Rightarrow 1$  autoval. pos. e 1 neg.  $\Rightarrow (\pi, 0)$  è un p.to di eq. **INSTABILE**



• Caso  $(\theta, \xi) = (\pm \beta, \mp R \sin \beta)$

pag. 6

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta = \pm \beta \\ \xi = \mp R \sin \beta}} = \begin{pmatrix} (mg + kz)R \cos \beta + kR^2 \sin^2 \beta & kR \cos \beta \\ kR \cos \beta & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta = \pm \beta \\ \xi = \mp R \sin \beta}} &= (mg + kz)kR \cos \beta + k^2 R^2 (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \\ &= (mg + kz)kR \cos \beta + k^2 R^2 (1 - 2\cos^2 \beta) \\ &= (mg + kz)^2 + k^2 R^2 - 2(mg + kz)^2 \\ &= k^2 R^2 - (mg + kz)^2 \end{aligned}$$

Se  $\left| \frac{mg + kz}{\sqrt{kR}} < 1 \right|$  abbiamo che  $\det > 0$  e, siccome un elemento sulla diagonale (cioè  $k$ ) è sicuramente positivo, allora ci sono 2 autoval.  $> 0 \Rightarrow (\theta, \xi) = (\pm \beta, \mp R \sin \beta)$  sono p.t. di equilibrio STABILI.

Se  $\left| \frac{mg + kz}{\sqrt{kR}} = 1 \right|$ , allora  $\det \text{Hess } U \Big|_{\substack{\theta = \pm \beta \\ \xi = \mp R \sin \beta}} = 0$  e, siccome un elemento diagonale è sicuramente positivo, allora 1 autoval. pos. e 1 nullo  $\Rightarrow$  occorre un supplemento di indagine.

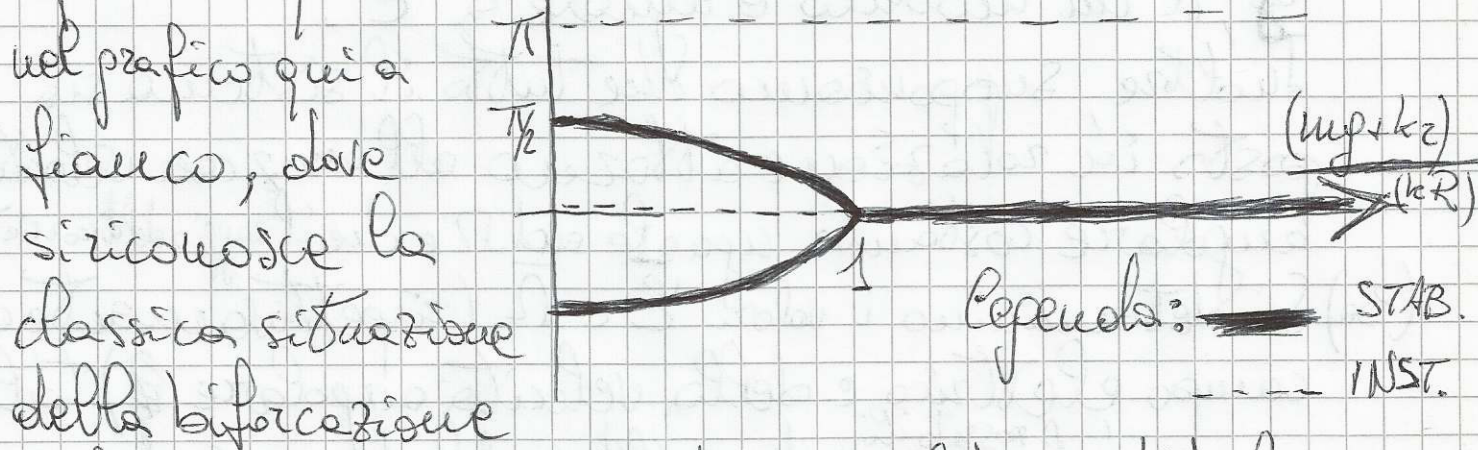
Il sottocaso con  $\frac{mg + kz}{\sqrt{kR}} > 1$  non deve essere considerato, perché in tale situazione i p.t. di eq.  $(\pm \beta, \mp R \sin \beta)$  ~~non~~ non sono stabili.



Passiamo ora a riconsiderare i casi che necessitano un supplemento di indagine. Innanzitutto, è conveniente riassumere la situazione grazie alla seguente tabella:

| $(mg+kz)/(kR)$                  | $> 1$        | $= 1$   | $< 1$ |
|---------------------------------|--------------|---------|-------|
| $(\theta, \xi)$                 |              |         |       |
| $(0, 0)$                        | STAB.        | ?!<br>! | INST. |
| $(\pi, 0)$                      | INST.        | INST.   | INST. |
| $(\pm \beta, \pm R \sin \beta)$ | <del>?</del> | ?!<br>! | STAB. |

Inoltre riportiamo le informazioni riguardanti i p.ti di equilibrio nel grafico qui a fianco, dove si riconosce la classica situazione della biforcazione a forchetta di un p.to di equilibrio stabile.



a forchetta di un p.to di equilibrio stabile.

Questo ci porta a congetturare che nel caso critico  $\frac{mg+kz}{kR} = 1$  i 3 p.ti ~~estremi~~ di eq.  $(0, 0), (\pm \beta, \pm R \sin \beta)$  sono in realtà coincidenti in un p.to di equilibrio stabile. Diamo una dimostrazione rigorosa di questa



~~lattera~~ affermazione.

pag. 8

Osserviamo che  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \inf_{\theta \in \mathbb{T}} U(\theta, \xi) = +\infty$ .

Ciò implica che la funzione  $U \in C^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$  ammette un p.to di minimo "al finito" e questo non può che essere un p.to stazionario.

I p.ti stazionari sono (nel caso  $\frac{m\mu + kZ}{\sqrt{kR}} = 1$ ) solo  $(0,0)$  e  $(\pi,0)$  (che è un p.to di sella).

Ne segue che il p.to di minimo del potenziale non può che essere  $(0,0)$ , da il quale, quindi, sarà un p.to di equilibrio STABILE, per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

(3) Supponiamo ora che <sup>il punto  $Q$  sia dotato di carica  $q$  su cui esiste</sup>  $U$  sia un campo elettrico uniforme, parallelo ed equiverso all'asse  $y$ , il cui modulo è uguale a  $E$ .

Inoltre supponiamo che tutto il sistema sia posto in rotazione attorno all'asse  $z$  con velocità angolare costante uguale ad  $\Omega$  e che il raggio del disco sia <sup>notevole</sup> trascurabile.

(3a) Si determinino i valori  $\bar{E}$  e  $\bar{\Omega}$  (rispettivamente del campo elettrico e della velocità angolare) tali per cui le <sup>possibili</sup> posizioni di equilibrio del disco si dispongano su una retta orizzontale.

(3b) Quando  $E = \bar{E}$  e  $\Omega \neq \bar{\Omega}$  si <sup>determinino</sup> le equazioni delle eq. del moto tali per cui la guida orizzontale permanga sempre <sup>allineata</sup> sovrapposta all'asse  $x$ .



Trascurando gli effetti dovuti al campo magnetico indotto dal movimento della carica elettrica posta in  $Q$ , abbiamo che ~~l'esistenza delle 2~~ nuove forze (elettica e centrifuga) modifica l'energia potenziale come segue:

$$U = U - q E y - \frac{1}{2} m \frac{\Omega^2 x^2}{c}$$

←  
nuova  
energia  
potenziale

←  
energia  
potenziale  
precedente

←  
energia  
potenziale  
elettica

←  
energia  
potenziale  
centrifuga

pag. 9

Osserviamo che il calcolo dell'energia potenziale centrifuga è molto semplificata dal fatto che abbiamo ora assunto un'approssimazione puntiforme per descrivere il disco.

Inoltre, siccome ora il piano  $Oxy$  è in rotazione anche la forza di Coriolis è non nulla, ma siccome la velocità relativa è proprio nel piano  $Oxy$  (e pure la vel. ang. è parallela ad  $y$ ), quindi  $\underline{F}_C = -2m \underline{\omega} \wedge \underline{v}_c$  sarà normale a  $Oxy$  e quindi verrà neutralizzato dal dispositivo vincolare che impedisce ~~al~~ agli elementi del sistema d'allontanarsi dal piano  $Oxy$ .

Riesprimiamo la nuova energia potenziale in funzione delle coordinate libere, cioè

$$U = -mgR \cos \theta + \frac{1}{2} k \xi^2 + kR \xi \sin \theta - \overset{z=0}{\frac{1}{2} k R^2 \cos^2 \theta} + qER \cos \theta - \frac{1}{2} m \Omega^2 (R^2 \sin^2 \theta + R \xi \sin \theta + \xi^2) =$$

$$= -(mg + kR - qE) R \cos \theta + \frac{1}{2} (k - m \Omega^2) \xi^2 + (k - m \Omega^2) R \xi \sin \theta - \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$



Possiamo quindi ricalcolare la nuova lagrangiana: [ pag. 10 ]

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m R \dot{\xi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{3}{2} m \dot{\xi}^2 + (m g - q E) R \cos \theta - \frac{1}{2} (k - m \Omega^2) \xi^2 - (k - m \Omega^2) R \xi \sin \theta + \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$

e le nuove eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m R^2 \ddot{\theta} + m R \dot{\xi} \cos \theta + (m g - q E) R \sin \theta + (k - m \Omega^2) R \xi \cos \theta - m R^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = m R \ddot{\theta} \cos \theta - m R \dot{\theta}^2 \sin \theta + 3 m \ddot{\xi} + (k - m \Omega^2) (\xi + R \sin \theta) = 0 \end{cases}$$

È immediato osservare che ponendo

$$\bar{E} = \frac{m g}{q}, \quad \bar{\Omega} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$$

le eq. di Lagrange e corrispondentemente (e più diretto) il potenziale  $U$  si semplificano drasticamente.

Infatti, per quei particolari valori  $(\bar{E}, \bar{\Omega})$  si ha

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m R^2 \ddot{\theta} + m R \dot{\xi} \cos \theta - m R^2 \bar{\Omega}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = m R \ddot{\theta} \cos \theta - m R \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{3}{2} m \ddot{\xi} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -m R \bar{\Omega}^2 \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \end{cases}$$



Osserviamo che, in queste condizioni, la variabile  $\xi$  è ciclica per  $\mathcal{L}$ . pag. 11

Ne segue che il sistema ha 2 costanti del moto:

1. la "solita" energia totale meccanica:

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m R \dot{\xi} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{3}{4} m \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} m R^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$$

2. il momento cinetico coniugato a  $\xi$ , cioè

$$p_{\xi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = m R \dot{\theta} \cos \theta + \frac{3}{2} m \dot{\xi}$$

Determiniamo i p.t. di equilibrio del sistema:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ è un'identità banale!}$$

Ciò significa che i p.t. di equilibrio sono del tipo  $(\theta, \xi) \in \left\{ (0, c), (\pi, c), \left(\pm \frac{\pi}{2}, c\right), \forall c \in \mathbb{R} \right\}$ .

Ciò conferma che i valori  $\Omega$  e  $E$  sono quelli che consentono di avere i p.t. di equilibrio disposti in modo tale da formare delle rette.

Passiamo ora a considerare il problema (3b). Le m.e.p. di  $\mathcal{L}$  sono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m R^2 \ddot{\theta} + m R \ddot{\xi} \cos \theta + (k - m \Omega^2) R \xi \cos \theta - m R^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = m R \ddot{\theta} \cos \theta - m R \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{3}{2} m \ddot{\xi} + (k - m \Omega^2) (\xi + R \sin \theta) = 0 \end{cases}$$



Se esistono soluzioni t.c. la guida è sempre sovrapposta all'asse x, allora esse sono della forma

$$t \mapsto \left( \vartheta(t) = \pm \frac{\pi}{2}, \xi(t) \right)$$

pag. 12

quindi le eq. di Lagrange diventano

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0 = 0 \quad \leftarrow \text{è una identità banale!} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = \frac{3m}{2} \ddot{\xi} + (k - m\Omega^2)(\xi \pm R) = 0 \end{cases}$$

A seconda dei casi (cioè se  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  o  $\vartheta = -\pi/2$ ), si pone

$$X = \xi \pm R$$

Se  $|\Omega| < |\bar{\Omega}|$ , allora  $k - m\Omega^2 > 0$ , quindi

$$\frac{3}{2} m \ddot{X} + (k - m\Omega^2) X = 0,$$

che è l'eq. tipica di uno oscillatore armonico.

$$\Rightarrow X(t) = A \cos\left(\frac{2(k - m\Omega^2)}{3m} t + \varphi\right) \Rightarrow \boxed{\xi(t) = A \cos\left(\frac{2(k - m\Omega^2)}{3m} t + \varphi\right) \pm R}$$

è la soluzione generale con A e  $\varphi$  che dipendono dalle condizioni iniziali.

Passiamo ora al caso  $|\Omega| > |\bar{\Omega}|$ , allora

$k - m\Omega^2 < 0$ , poniamo

$$\omega^2 = \frac{2(m\Omega^2 - k)}{3m} = \frac{2}{3} \left( \Omega^2 - \frac{k}{m} \right), \text{ allora}$$

$$\text{Siccome } \frac{3}{2} m \ddot{X} + (k - m\Omega^2) X = 0 \Rightarrow \ddot{X} = \omega^2 X$$

è l'eq. di un repulsore armonico, quindi

$$X(t) = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi(t) = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t} \pm R}$$

è la soluzione generale dove a e b sono costanti di integrazione che dipendono dalle condizioni iniziali.