

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
4 Febbraio 2016

Un sistema meccanico è costituito da un'asta, una guida rettilinea e un disco; l'asta e la guida rettilinea sono da considerarsi di massa trascurabile, mentre il disco è un corpo rigido di massa m e con densità omogenea al suo interno; essi si muovono in un piano **verticale** Oxy . L'asta è di lunghezza R ed è vincolata in modo tale che un suo estremo è posto in corrispondenza all'origine O . In corrispondenza all'altro estremo (mobile) Q dell'asta è incernierata la guida in modo che essa sia sempre in *orizzontale*. La guida è di lunghezza da considerarsi idealmente infinita e su di essa rotola senza strisciare il disco, che è di raggio $r < R$. Una molla ideale, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, collega il centro del disco C all'origine O .

Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si supponga che il sistema è modificato come descritto qui di seguito. Tutto il sistema meccanico è ora da considerarsi non inerziale, perché è posto in rotazione, con velocità angolare uniforme Ω attorno all'asse y ; inoltre, nel punto Q sia posta una carica elettrica q che è soggetta agli effetti prodotti da un campo elettrico uniforme di norma uguale a $\mathcal{E}$, parallelo ed equiverso all'asse y . Infine, si assuma che il raggio del disco sia di lunghezza trascurabile, cioè si ponga $r = 0$.
- (3A) Si determini una coppia di valori $\bar{\Omega}$ e $\bar{\mathcal{E}}$ (rispettivamente, della velocità angolare di rotazione e del campo elettrico) per cui il sistema è tale che tutte le posizioni di equilibrio del disco costituiscono una o più rette orizzontali; si discuta l'esistenza di integrali primi in tali condizioni.
- (3B) Nel caso in cui i valori della velocità angolare di rotazione e del campo elettrico siano tali che $\Omega \neq \bar{\Omega}$ e $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}$, si determinino le soluzioni delle equazioni del moto tali per cui la guida rimane sempre sovrapposta all'asse x .