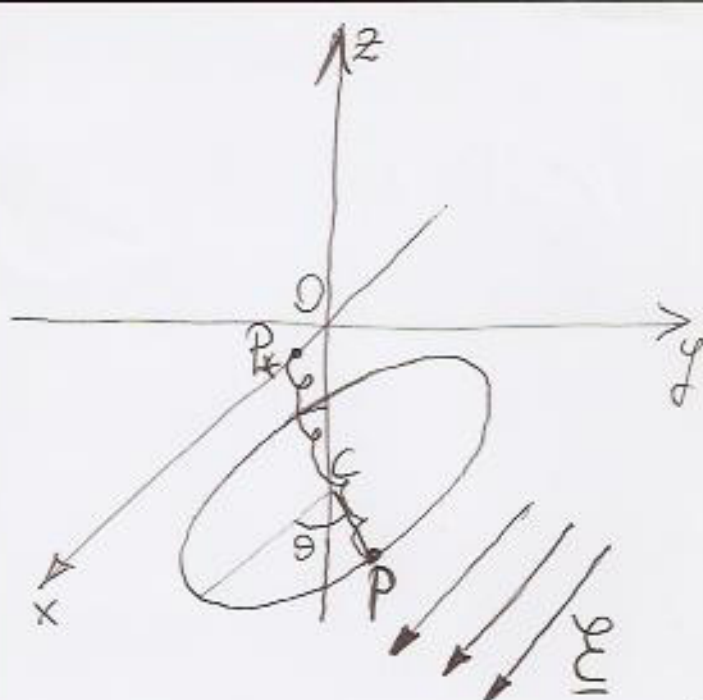




P solidale ad un anello di centro C e raggio R.

$\overline{CP} = R$, C $\in$ asse z; anello // piano Oxy

massa anello = M, massa P = m

$P_* \in$ asse x, $PP_* \perp$ asse x
carica elettrica in P = $q > 0$.

campo elettrico $\underline{E} \parallel$ asse x.

costante molla tra P e P_* = k.

1. Lagrangiana ed equazioni di Lagrange
Scepiamo, come coordinate lagrangiane, la coppia (z, ϑ) , dove z è la quota verticale dell'anello (e, quindi, anche del punto P), mentre ϑ è l'angolo formato dalla semiretta uscente da C e passante per P con il ~~semplice~~ piano Oxz.

Coordinate di P: $(R \cos \vartheta, R \sin \vartheta, z)$

" di P_* : $(R \cos \vartheta, 0, 0)$

" di C: $(0, 0, z)$

Possiamo esprimere l'energia cinetica nel modo seguente:

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \underline{v}_P \cdot \underline{v}_P,$$

dove I è l'inerzia dell'anello rispetto alle rotazioni attorno all'asse z, mentre il termine $\frac{1}{2} M \dot{z}^2$ è l'energia cinetica ^{traslazionale} dell'anello.

al centro del baricentro (che è, evidentemente, pag. 2
 il punto C di coordinate $(0, 0, z)$) dell'anello.
 Il calcolo del momento d'inerzia ^{dell'anello} rispetto all'asse
 z è sostanzialmente banale:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R \delta \psi \cdot (R^2 \cos^2 \psi + R^2 \sin^2 \psi) = \frac{1}{2} \delta \cdot R^3 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} M R^2,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che la densità
 di massa (omogenea) dell'anello è uguale a

$$\delta = \frac{M}{2\pi R}.$$

Siccome $\underline{v}_p = (R\dot{\theta} \sin \theta, R\dot{\theta} \cos \theta, \dot{z})$, allora

$$\frac{1}{2} m \underline{v}_p \cdot \underline{v}_p = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2,$$

pertanto,
$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{z}^2 + \frac{1}{2} (M + m) R^2 \dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale può essere espressa come segue:

$$U = M g z_c + m g z_p + \frac{1}{2} k \overline{PP_*}^2 + U_{el}$$

dove l'energia potenziale dovuta alla presenza delle
 cariche e del campo elettrico è tale che

$$-\text{grad}_{(x,y,z)} U_{el} = (q\mathcal{E}, 0, 0) \rightarrow U_{el} = -q\mathcal{E} x_p.$$

In termini delle coordinate la prangione abbiamo
 quindi che $U_{el} = -q\mathcal{E} R \cos \theta$.

Inoltre, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} k \overline{PP_*}^2 = \frac{1}{2} k (R^2 \sin^2 \vartheta + z^2)$$

pag. 3

In definitiva, abbiamo che

$$U = (M+m)gz + \frac{1}{2} k z^2 - q \mathcal{E} R \cos \vartheta + \frac{1}{2} k R^2 \sin^2 \vartheta$$

la lagrangiana è quindi ~~dato~~ tale che

$$L = L(z, \vartheta, \dot{z}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} (M+m) \dot{z}^2 + \frac{1}{2} (M+m) R^2 \dot{\vartheta}^2 - (M+m)gz - \frac{1}{2} k z^2 + q \mathcal{E} R \cos \vartheta - \frac{1}{2} k R^2 \sin^2 \vartheta$$

le eq. di lagrange sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= (M+m) \ddot{z} + (M+m)g + kz = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= (M+m) R^2 \ddot{\vartheta} + q \mathcal{E} R \sin \vartheta + k R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \end{aligned} \right.$$

Si osservi che le eq. di lagrange sono separabili,
cioè la prima non contiene alcuna dipendenza
da $\vartheta = \vartheta(t)$ e la seconda è indipendente da $z = z(t)$.

2. Studio dei p.ti di equilibrio e della loro stabilità

Come al solito dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= kz + (M+m)g = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= q \mathcal{E} R \sin \vartheta + k R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \end{aligned} \right.$$

la prima equazione, evidentemente, pag. 4
ha come unica soluzione

$$z = \frac{(M+m)g}{k} \quad , \quad \text{D'ora in avanti sia } d := -\frac{M+m}{k}g$$

Per quanto riguarda la seconda soluzione, possiamo procedere come segue:

$$R \sin \vartheta (g + kR \cos \vartheta) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \vartheta = 0 \quad \text{oppure} \quad kR \cos \vartheta = -g$$

$$\Downarrow \\ \vartheta = 0, \pi$$

$$\Downarrow \\ \vartheta = \pm \beta \quad \text{dove } \beta := \arccos\left(\frac{g}{kR}\right)$$

$$\text{perché } \frac{g}{kR} \leq 1.$$

Riassumendo, i punti di equilibrio sono

$$(z, \vartheta) \in \left\{ (d, 0), (d, \pi), (d, \pm \beta) \right\}$$

dove l'ultima coppia di p.ti di equilibrio $\exists$ se
 $\frac{g}{kR} \leq 1$.

Al fine di studiare la stabilità dei p.ti di equilibrio, calcoliamo

$$\text{Hess } U \Big|_{\text{p.ti}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & gR \cos \vartheta + 2kR^2 \cos^2 \vartheta - kR^2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora i vari casi particolari.

Caso $(z, \vartheta) = (d, 0)$

pag. 5

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{z=d \\ \vartheta=0}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & q^2 \mathcal{E} R + k R^2 \end{pmatrix}$$

I due autovalori della matrice sono evidentemente i valori che compaiono sulla diagonale principale, quindi abbiamo 2 autoval.

sempre positivi $\Rightarrow (d, 0)$ è un p.to di equilibrio STABILE.

Caso $(z, \vartheta) = (d, \pi)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{z=d \\ \vartheta=\pi}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -q^2 \mathcal{E} R + k R^2 \end{pmatrix}$$

Se $\frac{q^2 \mathcal{E}}{k R} > 1 \Rightarrow 1$ autovel. pos. e 1 neg. $\Rightarrow$ INSTABILE

Se $\frac{q^2 \mathcal{E}}{k R} = 1 \Rightarrow 1$ autovel. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ caso indeciso

Se $\frac{q^2 \mathcal{E}}{k R} < 1 \Rightarrow 2$ autovel. pos. $\Rightarrow$ p.to di eq. STABILE.

Occorrerà quindi un supplemento di indagine per il caso $\frac{q^2 \mathcal{E}}{k R} = 1$.

Caso $(z, \vartheta) = (d, \pm \beta)$

$$\text{Hess } U \Big|_{\substack{z=d \\ \vartheta=\pm\beta}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & q^2 \mathcal{E} R \cdot \left(-\frac{q^2 \mathcal{E}}{k R}\right) + 2k R^2 \frac{q^2 \mathcal{E}^2}{k^2 R^2} - k R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{q^2 \mathcal{E}^2 - k^2 R^2}{k} \end{pmatrix}$$

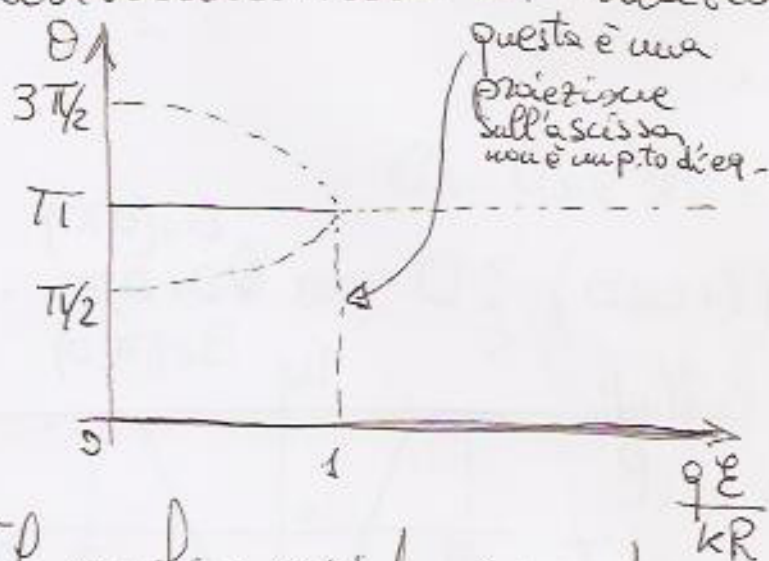
Se ~~caso~~ $\frac{qE}{kR} > 1 \Rightarrow$ i p.ti di equilibrio $(d, \pm\beta)$ ~~non~~ pag. 6

Se $\frac{qE}{kR} = 1 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo, quindi è necessario un supplemento di informazione.

Se $\frac{qE}{kR} < 1 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg.
 $\Rightarrow (d, \pm\beta)$ sono p.ti di equilibrio
INSTABILI.

Rimane da decidere la stabilità dei p.ti di equilibrio (d, π) , $(d, \pm\beta)$ quando $\frac{qE}{kR} = 1$. Osserviamo che, se $\frac{qE}{kR} = 1$, allora $\beta = \arccos\left(\pm \frac{qE}{kR}\right) = \pi$; quindi, quando $\frac{qE}{kR} = 1$, $(d, \pm\beta)$ coincide con (d, π) .

Riassumiamo la situazione con il seguente grafico:



legenda — stabile
----- instabile

Il grafico evidenzia che in corrispondenza di $\frac{qE}{kR} = 1$ si verifica la biforcazione ^{"a forchetta"} di un p.to di equilibrio instabile, questo induce a pensare che (d, π) sia instabile nel caso

indiviso $\frac{qER}{kR} = 1$.

pag. 7

Ci proponiamo ora di provare rigorosamente tale congettura: A questo scopo, dobbiamo trovare delle soluzioni che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. ~~converge~~ ^{esiste} pressoché una $\forall \delta > 0 \exists$ una cond. iniz. nella palla $B_\delta(d, \pi)$ tale che il suo evoluto esce da $B_\varepsilon(d, \pi)$ a qualche istante di tempo $t > 0$.

Osserviamo che $\exists$ soluzioni ^{delle eq. differ.} del tipo $z(t) = d + \vartheta(t)$ determinato dalla sola 2^a eq. di Lagrange, cioè

$$(M+m)R^2\ddot{\vartheta} + qER \sin \vartheta + kR^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

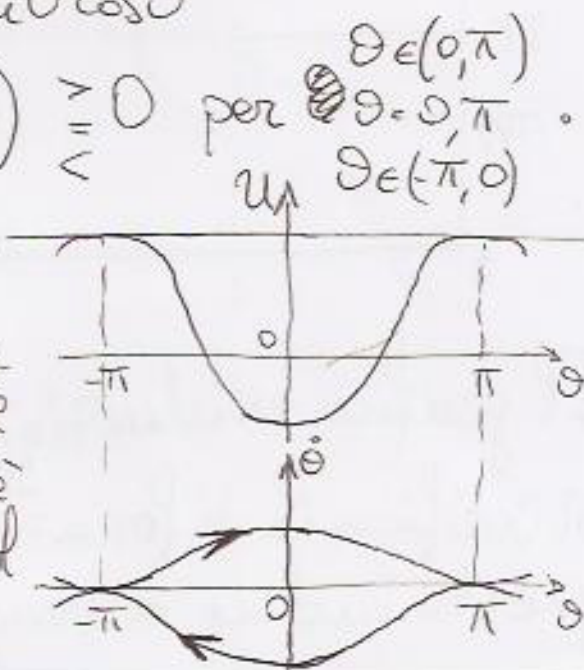
L'eq. precedente può essere interpretata come un semplice problema di meccanica 1-D per $\vartheta \in \pi$, pertanto si conserva l'energia totale

$$E = \frac{1}{2} (M+m) R^2 \dot{\vartheta}^2 + U(\vartheta), \text{ dove } U(\vartheta) = -qER \cos \vartheta + \frac{1}{2} kR^2 \sin^2 \vartheta$$

Ovviamente, si ha che

$$U'(\vartheta) = qER \sin \vartheta + kR^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = kR^2 \sin \vartheta (1 + \cos \vartheta) \begin{cases} \geq 0 & \text{per } \vartheta \in (0, \pi) \\ < 0 & \text{per } \vartheta \in (\pi, 0) \end{cases}$$

Qui a destra riportiamo lo studio del grafico del potenziale e il ritratto in fase per le sole orbite corrispondenti a $E = U(\pi)$, cioè per il ~~più~~ massimo (quartico) del potenziale.



Dal ritratto in fase, si evince immediatamente pag. 8 che le condizioni iniziali che appartengono alle separatrici possono generare dei m.t. che escono da $B_{TV/2}(\alpha, \pi)$ ~~per~~ anche quando tali cond. iniz. sono indefinitamente vicine ~~alla~~ a quello stesso p.to di equilibrio.

In definitiva, lo studio della stabilità dei p.t. di equilibrio può essere riassunto nella seguente tabella:

$(z, \theta) \begin{smallmatrix} q \\ E \\ KR \end{smallmatrix}$	< 1	$= 1$	> 1
$(d, 0)$	ST.	ST.	ST.
(d, π)	ST.	INST.	INST.
$(\alpha, \pm \beta)$	INST.	INST.	?

3a) Si risolvano, il più esplicitamente possibile, le eq. di Lagrange (cio' significa che laddove è appropriato si possono determinare le soluzioni con il metodo delle quadrature).

Come abbiamo già osservato al termine della soluzione del p.to 1, le equazioni di Lagrange sono separabili, quindi il nostro problema completo si riduce alla soluzione di 2 eq. del moto ^{+ ciascuna delle quali è} ~~che sono associate~~

a un problema di meccanica 1-D è
 quindi entrambe sono integrabili (ovvero pag. 9
 la loro soluzione può essere scritta esplicitamente).
 Infatti, la prima ^{eq. di Lagrange} può essere posta nella forma
 seguente:

$$\ddot{z} = -\omega^2 z - g, \quad \text{dove } \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}},$$

~~Ma~~ è ben noto che l'equazione precedente
 è quella abituale per (sarebbe meglio dire "archetipica", ma forse è un aggettivo troppo "forbito") dell'
 l'oscillatore armonico pesante, la cui soluzione
 generale è

$$z(t) = A \cos(\omega t + \varphi) - g/\omega^2.$$

dove l'ampiezza A e la fase iniziale φ sono
 determinati dalle condizioni iniziali, poiché si

$$\begin{cases} z_0 = A \cos \varphi - g/\omega^2 \\ \dot{z}_0 = -A\omega \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(z_0 + \frac{g}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega}\right)^2} = A \\ \text{una volta noto } A \begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{A} \left(z_0 + \frac{g}{\omega^2}\right) \\ \sin \varphi = -\frac{\dot{z}_0}{A\omega} \end{cases} \end{cases}$$

Come già osservato all'interno della soluzione del punto
 2, la seconda equazione di Lagrange, cioè

$$(M+m)R^2 \ddot{\theta} + g R \sin \theta + k R^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

può essere visto come un problema di meccanica 1-D
 con forze puramente posizionali; infatti, essa

può essere descritta come segue:

pag. 10

$$[(M+m)R^2] \ddot{\theta} = - \frac{dU}{d\theta},$$

dove U è definita come al punto 2, cioè

$$U = -qER \cos \theta + \frac{1}{2} k R^2 \sin^2 \theta.$$

Ricordiamo, ovviamente, che θ è la variabile dipendente $\theta \in \mathbb{T}$.

Dalle eq. precedenti, discende che si conserva l'energia "di rotazione attorno all'asse z ", cioè vale la relazione

$$\frac{1}{2} (M+m) R^2 \dot{\theta}^2 + U(\theta) = E.$$

È ben noto che l'eq. precedente può essere risolta per quadrature, cioè si scrive

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} (E - U(\theta))},$$

quindi, per separazione di variabili, otteniamo la seguente relazione differenziale:

$$dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} (E - U(\theta))}}.$$

Integrando, ambo i membri dell'eq. precedente otteniamo la soluzione cercata, ovvero

$$t - t_0 = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} (E - U(\psi))}}, \text{ dove abbiamo}$$

utilizzato la cond. iniz. $\theta(t_0) = \theta_0$, mentre tutte le cond. iniz. (cioè usando anche $\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0$) vengono permesse di

calcolare

$$E = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}_0^2 + U(\theta_0)$$

pag. 11

e di determinare il segno in modo che sia in accordo (inizialmente) con quello di $\dot{\theta}_0$. E' ben noto che poi il segno deve essere cambiato in presenza di una barriera di potenziale.

(3b) Si considerino delle condizioni iniziali tali che al tempo $t=0$ il punto P si trova sulla parte negativa dell'asse delle x con velocità puramente orizzontale (cioè con ~~la~~ componente verticale della velocità uguale a 0). Sia T il periodo di rotazione attorno all'asse z (cioè il tempo ^{che intercorre tra 2 passaggi} ~~impiegato necessario perché~~ consecutivi nel semipiano Oxz con x negativo) per il nostro sistema e sia $\bar{T}$ il periodo di rotazione che si avrebbe in assenza della molla e del campo elettrico (cioè ponendo $k=0$ e $E=0$). Si determini quale condizione deve essere soddisfatta dai dati iniziali affinché per una qualsiasi $E>0$ "piccolo a piacere" avvenga che

$$\bar{T}(1-\varepsilon) \leq T \leq \bar{T}(1+\varepsilon)$$

limitandosi, per semplicità, allo studio del caso con $kR = qE/2$.

Per fissare le idee, è utile riportare il grafico del potenziale e il ritratto in fase relativi al caso $kR = \frac{qE}{2}$.

pag. 12

Come abbiamo già calcolato all'interno della soluzione del p.to 2,

$$U'(\theta) = qER \sin \theta + kR^2 \sin \theta \cos \theta$$

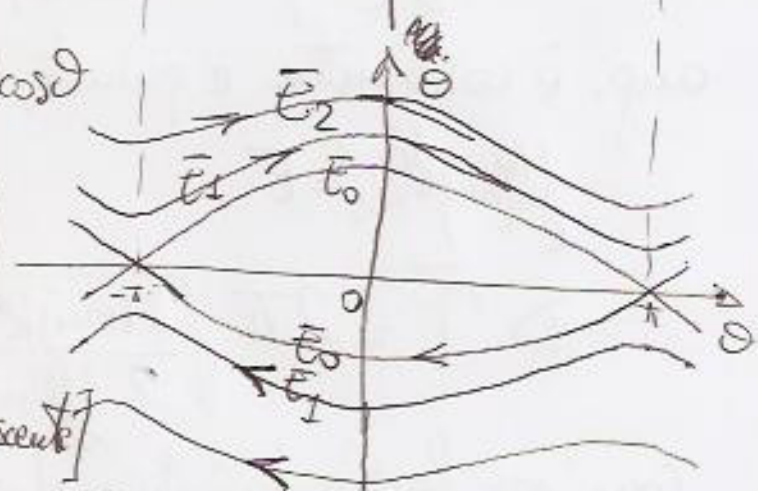
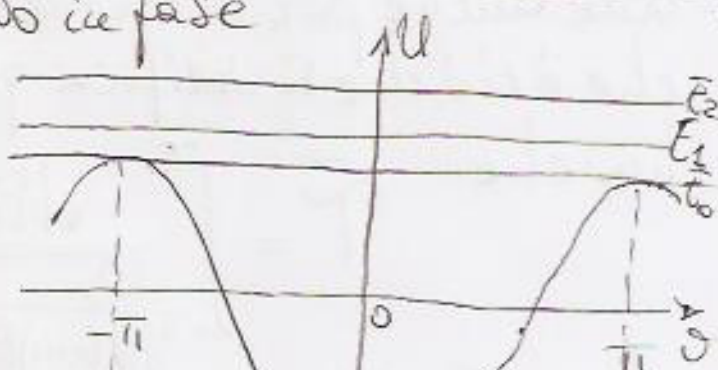
$$= qER \sin \theta \left(1 + \frac{1}{2} \cos \theta\right)$$

Pertanto, come per il pendolo semplice, U è crescente [decrescente] in $(0, \pi)$ [$(-\pi, 0)$].

Si noti che, nel ritratto in fase qui sopra, sono state riportate solo le orbite sulla separatrice (corrispondenti a $E_0 = U(\pi)$) e ~~anche~~ alcuni esempi di quelle di rotazione, cui siamo interessati. Basta infatti che $\dot{\theta}_0$ sia non nullo e allora $E = \frac{1}{2}(1+m)R^2 \dot{\theta}_0^2 + U(\pi) > U(\pi) = E_0$, quindi l'orbita è di rotazione.

Dalla soluzione della 2^a eq. di L. (che è riportata al p.to 3a) si ricava una formula esplicita per il periodo di rotazione:

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{(1+m)R^2} (E - U(\theta))}}$$



la cond. iniz. t.c.
 $P \in \text{asse } x < 0$
 equivale a $\dot{\theta}_0 = \pi$

la stessa formula, con piccoli adattamenti, pag. 13
 vale anche per il "rotatore libero", cioè il caso con $U=0$,
 che è ciò che si verifica quando $k=0$ e $E=0$; allora si
 ha che

$$\bar{T} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} E}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(M+m)R^2}{2E}}$$

dove $E = \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}^2$ cioè, quando $k=0$ e $E=0$, la vel.
 ang. è costante e quindi, in particolare,

$$\frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2 = E$$

$$\Rightarrow \bar{T} = 2\pi \sqrt{\frac{(M+m)R^2}{2 \cdot \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2}} = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_0|}$$

con'era facile da intuire dopo aver osservato che $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 \forall t \in \mathbb{R}$
 quando $k=0$ e $E=0$.

Dobbiamo quindi riuscire a dimostrare che, per opportuni
 in dati iniziali, sussiste la disuguaglianza

$$\frac{2\pi}{|\dot{\theta}_0|} \cdot (1-\varepsilon) \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} (E - U(\theta))}} \leq \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_0|} (1+\varepsilon).$$

dove $E = \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2 + U(\pi)$. Dal grafico del potenziale è
 evidente che $U(0) \leq U(\theta) \leq U(\pi)$, quindi abbiamo
 che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} (E - U(0))}} \leq T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} (E - U(\theta))}} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} (E - U(\pi))}}$$

È conveniente trattare separatamente
le 2 ~~disuguaglianze~~ ^{disuguaglianze}. In particolare, la
seconda diventa assai semplice, dopo aver osservato che

$$E - U(\pi) = \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2 + \cancel{U(\pi)} - \cancel{U(\pi)}$$

$$\Rightarrow T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2}(E - U(\theta))}} \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2}} = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_0|} = \bar{T}.$$

Portanto, $\forall \dot{\theta}_0 \neq 0$ abbiamo che

$$T \leq \bar{T}$$

e, quindi, a maggior ragione $\forall \varepsilon > 0$

$$T \leq (1+\varepsilon)\bar{T}$$

Passiamo a considerare la minoration del
periodo. Cominciamo ad osservare che

$$E - U(0) = \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2 + qER - (-qER) = \frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2 + 2qER$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{(M+m)R^2} \left(\frac{1}{2}(M+m)R^2 \dot{\theta}_0^2 + 2qER \right)}} = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}_0| \cdot \left(1 + \frac{4qE}{(M+m)R \dot{\theta}_0^2} \right)^{1/2}} \\ &= \bar{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4qE}{(M+m)R \dot{\theta}_0^2}}} \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ pag. 15
 piccolo a piacere, $\exists$ dei dati iniziali
 t.c.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{49\varepsilon}{(1+\mu)R\dot{\theta}_0^2}}} \geq 1 - \varepsilon$$

L'unico fattore che dipende dai dati iniziali, nella eq. precedente, è $\dot{\theta}_0$: è intuitivo che se $|\dot{\theta}_0| \gg 1$, allora il membro di sinistra dell'equazione è prossimo a 1. Questo ci fa comprendere che dobbiamo trovare delle soluzioni corrispondenti a rotazioni veloci.

Siccome ~~è~~ siamo interessati ad ε "piccolo a piacere", quindi possiamo assumere che $1 - \varepsilon > 0$ e, allora, elevando al quadrato la diseq. di inizio pagina otteniamo

$$\frac{1}{1 + \frac{49\varepsilon}{(1+\mu)R\dot{\theta}_0^2}} \geq 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \rightarrow \frac{1 + \frac{49\varepsilon}{(1+\mu)R\dot{\theta}_0^2}}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2} \leq \frac{1}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}$$

Sempre perché ε è piccolo allora conviene utilizzare la disuguaglianza

$$(1 + \varepsilon) \leq \frac{1}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2} \quad \text{che vale } \forall \varepsilon < \frac{1}{2}$$

In luogo di cercare soluzioni per la diseq.

$$1 + \frac{49\varepsilon}{(1+\mu)R\dot{\theta}_0^2} \leq \frac{1}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}$$

risolviamo la più restrittiva (e più semplice)

$$1 + \frac{49\varepsilon}{(1+\mu)R\dot{\theta}_0^2} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{per } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

- Inciso -

Dim. della disuguaglianza

$$1 + \varepsilon \leq \frac{1}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2} \leq 0$$

è sicuramente verificata
 $\forall 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ poiché per tali
 valori $- \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \leq - \varepsilon \leq 0$
 e $1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$

Otteniamo quindi che deve essere verificato che pag. 16

$$\dot{\theta}_0^2 \geq \frac{4gE}{(M+m)R} \cdot \frac{1}{E}$$

ovvero

$$|\dot{\theta}_0| \geq \sqrt{\frac{4gE}{(M+m)R}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \quad \text{dove si intende che } 0 < E < 1/2$$

Quest'ultima è la condizione che deve essere verificata da $\dot{\theta}_0$ affinché

$$\bar{T}(1-E) \leq T \leq \bar{T}(1+E).$$

Il risultato che abbiamo ottenuto, può essere riformulato come segue:

il periodo di rotazione può essere indefinitamente prossimo a quello di rotazione libera (cioè in assenza di potenziale) purché la rotazione sia veloce abbastanza.

$$\text{Si osserva che } |\dot{\theta}| \geq |\dot{\theta}(\pi)| = |\dot{\theta}_0| = O\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right).$$

Questo fatto è ben noto e anche assai intuitivo: per rotazioni molto veloci, la differenza (intensiva) ~~tra~~ l'energia totale è, percentualmente, quasi tutta dovuta all'energia cinetica e, quindi, l'effetto del potenziale è sempre meno rilevante. Di conseguenza, il comportamento è sempre più simile a quello del rotatore libero.