

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
22 Settembre 2014

Un sistema meccanico è costituito da un anello e da un punto materiale P , che si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale. L'anello è di raggio R e di massa M ; inoltre, esso è tale che la densità di massa al suo interno è omogenea ed è vincolato in modo da rimanere sempre parallelo al piano Oxy , ma può ruotare attorno al suo centro C , il quale, a sua volta, si può muovere liberamente *solo* sull'asse delle z . Il punto P è di massa m , giace sull'anello ed è solidale ad esso. Sia P_* la proiezione di P sull'asse delle x ; una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P a P_* . Inoltre, il solo punto P è anche dotato di carica elettrica q ed è soggetto a un campo elettrico uniforme di norma uguale a \mathcal{E} , parallelo ed equiverso all'asse x . È da intendersi che le masse dei punti C e P_* siano trascurabili e tutti i parametri del problema, ovvero m , M , R , k , q e \mathcal{E} , abbiano valori reali positivi.

I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il moto, il punto P_* può attraversare, senza che vi sia alcun urto, tanto il punto P quanto l'anello. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3a) Si risolvano, il più esplicitamente possibile, le equazioni di Lagrange (ciò significa che le soluzioni possono essere determinate anche utilizzando il *metodo delle quadrature*, laddove ciò sia appropriato).
- (3b) Si considerino delle condizioni iniziali tali che al tempo $t = 0$ il punto P si trova sulla parte negativa dell'asse delle x con velocità che giace nel piano orizzontale Oxy . Sia T il periodo di rotazione attorno all'asse z , per quanto riguarda il moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali; in altri termini, T è uguale al tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi del punto P nel semipiano verticale Oxz con ascisse negative. Inoltre, sia \bar{T} il periodo delle rotazioni libere, ovvero quello che si osserverebbe quando $k = 0$ e $\mathcal{E} = 0$. Per un qualsiasi $\varepsilon > 0$, da considerarsi *piccolo a piacere*, si determini una condizione che deve essere soddisfatta dalla (norma della) velocità iniziale, affinché avvenga che

$$\bar{T}(1 - \varepsilon) \leq T \leq \bar{T}(1 + \varepsilon) ,$$

limitandosi, per semplicità, allo studio del caso tale che $kR = q\mathcal{E}/2$.