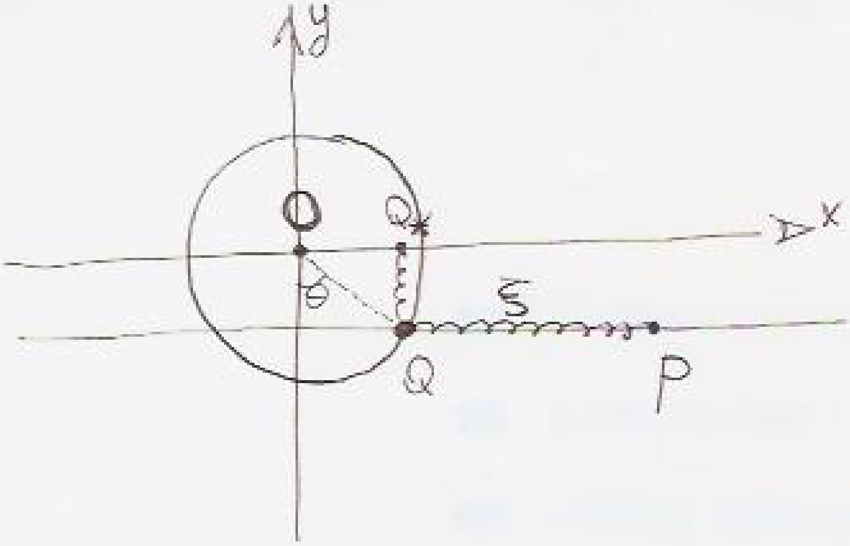


Esame luglio 2014

massa ruota $= M$
massa Q = massa $P = m$
massa Q_* e massa guida rettilinea (// asse x) trascurabili
$\overline{OQ} = R$
costante molla tra Q e $Q^* =$
" " " Q e $P = k$.

1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange.

Prendiamo come coord. libere o lagrangiane q (ξ, ϑ), così come in figura (cioè ξ è l'ascissa sulla guida rettilinea mobile misurata rispetto all'origine posta in Q).

Coord. di Q: $(R\sin\vartheta, -R\cos\vartheta)$.

" " P: $(R\sin\vartheta + \xi, -R\cos\vartheta)$.

" " Q^*: $(R\sin\vartheta, 0)$.

Per calcolare l'energia cinetica, dobbiamo ricordare che anche la ruota vi contribuisce, cioè

$$T_{tot} = T_{ruota} + T_Q + T_P,$$

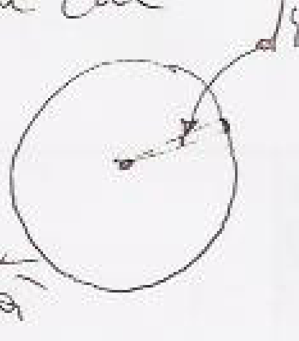
dove abbiamo considerato tutti i contributi dati

all'energia cinetica degli oggetti che hanno massa (la ruota, il punto Q e il punto P).
Per calcolare T_{ruota}, che è data dalla sola rotazione attorno all'asse passante per il suo baricentro (e normale al piano della figura), basta applicare la formula

$$T_{ruota} = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2$$

dove il momento di inerzia (rispetto all'asse passante per O e normale alla figura) è tale che

$$I = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi R^3 = 2\pi \delta R^3,$$



dove $\delta = \frac{M}{2\pi R}$ altro non è che la densità (omogenea) di materia della ruota, quindi

$$I = 2\pi \delta R^3 = MR^2$$

$$\Rightarrow T_{ruota} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\vartheta}^2$$ (come era intuibile e si poteva calcolare in vari altri modi).

Per quanto riguarda il punto Q:

$$T_Q = \frac{1}{2} m \underline{v}_Q \cdot \underline{v}_Q = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2 (\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2$$

Prima di calcolare T_P, scriviamo la velocità di P:

$$\underline{v}_P = (R\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \dot{\xi}, R\dot{\vartheta}\sin\vartheta).$$

$$\Rightarrow T_P = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + mR \dot{\xi} \dot{\vartheta} \cos\vartheta$$

Possiamo quindi scrivere l'energia cinetica totale: $T_{tot} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + mR \dot{\xi} \dot{\vartheta} \cos\vartheta + \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2\right) \dot{\vartheta}^2$

Passiamo a considerare l'energia potenziale.

$$U = mg y_Q + mg y_P + \frac{1}{2} k \overline{QQ_*}^2 + \frac{1}{2} k \overline{QP}^2$$

$$= -2mgR\cos\vartheta + \frac{1}{2} kR^2 \cos^2\vartheta + \frac{1}{2} k \xi^2$$

La lagrangiana sarà quindi

$$L = T_{tot} - U = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + mR \dot{\xi} \dot{\vartheta} \cos\vartheta + \left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \dot{\vartheta}^2 + 2mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2} k \xi^2 - \frac{1}{2} kR^2 \cos^2\vartheta$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi ~~date~~ tali che

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = m \ddot{\xi} + mR \ddot{\vartheta} \cos\vartheta - mR \dot{\vartheta}^2 \sin\vartheta + k\xi = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = mR \ddot{\xi} \cos\vartheta + (M+2m) R^2 \ddot{\vartheta} \cancel{- mR \dot{\xi} \dot{\vartheta} \sin\vartheta} \cancel{+ mR \dot{\xi} \dot{\vartheta} \sin\vartheta} + 2mgR\sin\vartheta - kR^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \end{cases}$$

2) P.ti di equilibrio e stabilità

Bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = k\xi = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = (2mg - kR\cos\vartheta) R \sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

Dalla prima eq. discende (ovviamente) che

$$\xi = 0 .$$

Dalla seconda, invece, segue che

$$\sin\theta = 0 \quad \text{oppure} \quad \cos\theta = \frac{2mg}{kR}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\theta = 0, \pi \qquad\qquad \theta = \pm\beta \ \text{ con } \beta = \arccos\frac{2mg}{kR}$$

quando $\frac{2mg}{kR} \leq 1$.

Riassumendo, i p.ti di equilibrio sono $(\xi, \theta) \in \left\{ (0,0), (0,\pi), (0,\pm\beta) \right\}$ dove l'ultima coppia esiste sse $\frac{2mg}{kR} \leq 1$.

Al fine di poter discutere correttamente la stabilità, calcoliamo preliminarmente

$$\mathrm{Hess}\, U = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2mgR\cos\theta - 2kR^2\cos^2\theta + kR^2 \end{pmatrix}$$

Caso $(\xi, \theta) = (0, 0)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=0}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2mgR - kR^2 \end{pmatrix}$$

Oss. che il primo autovalore è sempre positivo, mentre il secondo è $\underset{\text{nullo}}{\overset{\text{positivo}}{\text{neg.}}}$ sse $\frac{2mg}{kR} \gtreqless 1$.

Di conseguenza,

se $\frac{2mg}{kR} > 1 \Rightarrow (0,0)$ è STABILE

se $\frac{2mg}{kR} < 1 \Rightarrow (0,0)$ è INSTABILE

se $\frac{2mg}{kR} = 1 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo, occorre un supplemento di indagine.

Caso $(\xi, \theta) = (0, \pi)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=\pi}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -2mgR - kR^2 \end{pmatrix}$$

Un autoval. pos e 1 neg. $\Rightarrow$ P.to di equilibrio INSTABILE.

Caso $(\xi, \theta) = (0, \pm\beta)$

$$\mathrm{Hess}\, U \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \theta=\pm\beta}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2mg\cancel{R}\frac{2mg}{k\cancel{R}} - 2\cancel{k}\cancel{R^2}\frac{4m^2g^2}{\cancel{k^2R^2}} + kR^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -\frac{4m^2g^2}{k} + kR^2 \end{pmatrix}$$

Quando $\frac{2mg}{kR} > 1$, questi p.ti di equilibrio ~~∄~~.

Quando $2mg/kR < 1 \Rightarrow$ 2 autoval. pos. $\Rightarrow$ P.ti di eq. STABILI

" $2mg/kR = 1 \Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 nullo $\Rightarrow$ serve un suppl. di indagine.

Studiamo ora il caso lasciato in sospeso, ovvero quando i parametri sono tali che

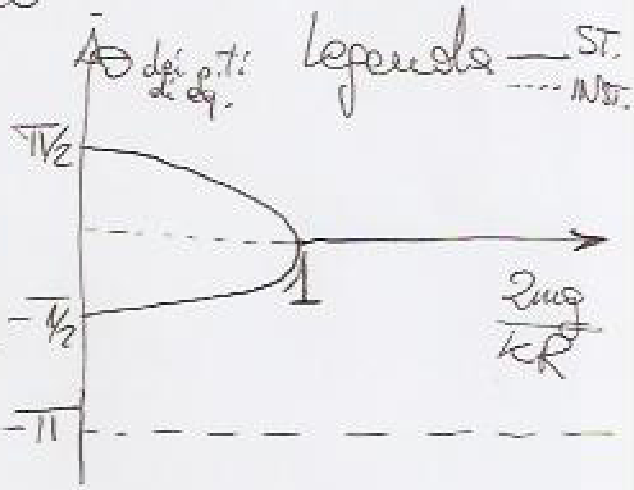
$$\frac{2mg}{kR} = 1 .$$

Avremo 3 p.ti di eq. da considerare, cioè

$$(0,0) \text{ e } (0, \pm\beta),$$

ma quando $\frac{2mg}{kR} = 1 \Rightarrow \beta = \operatorname{acos} 1 = 0$,

quindi quei 3 p.ti coincidono.



Il grafico che studia la stabilità, evidenzia che siamo in presenza della classica situazione di biforcazione "a forchetta" di un p.to di equilibrio stabile, questo ci porta a congetturare che nel caso

$$\frac{2mg}{kR} = 1 \quad \text{il punto } (0,0) \text{ sia stabile.}$$

Nel caso in questione, siccome il potenziale è separabile in 2 distinte funzioni di cui la prima dipende solo da ξ e la seconda solo da θ, la dimostrazione della congettura è particolarmente semplice. Infatti, basta introdurre f e g tali che:

$$U(\xi,\vartheta) = f(\xi) + g(\vartheta)$$

dove $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ altro non sono che

$$f(\xi) = \frac{1}{2} k \xi^2, \quad g(\vartheta) = -2mgR\cos\vartheta + \frac{1}{2} kR^2\cos^2\vartheta$$
$$= 2mgR\left(-\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)$$

Evidentemente, la funzione f ha un minimo nell'origine.

Calcoliamo $\quad g'(\vartheta) = 2mgR\sin\vartheta(1-\cos\vartheta)$

Di conseguenza, è evidente che

g è crescente in $(0,\pi)$, decrescente in $(-\pi,0)$

Possiamo pertanto concludere che anche g ha un minimo (quartico) in 0, quindi

$U = f+g$ ha il suo unico p.to di minimo in $(0,0)$ che è un p.to di eq. STABILE per il th. di Lagrange-Dirichlet.

3) Si supponga ora che il sistema sia soggetto a un ulteriore vincolo, tale che il punto Q stia fisso sull'asse delle ordinate e al di sotto dell'origine. Inoltre, si consideri il sistema quando è posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare uniforme uguale ad Ω.

Al variare del valore di Ω, si scriva esplicitamente la legge del moto di P sulla guida orizzontale.

In particolare, si verifichi che esistono valori di Ω per cui il corrispondente moto è uniforme.

Quando il sistema di riferimento è non inerziale perché in rotazione uniforme (con vel. ang. Ω) attorno all'asse y, allora entrano in gioco ~~costituiti~~ le forze apparenti, dovute alla forza di Coriolis e quella centrifuga.

La forza di Coriolis è proporzionale a

$-2\underline{\omega}\wedge\underline{v}'$ dove (nel nostro caso) $\underline{\omega}=\Omega\,\underline{e}_y$ e la velocità (nel nostro sistema non inerziale) di un qualsiasi punto è tale che $\underline{v}'$ appartiene al piano Oxy.

$\Rightarrow$ $-2\underline{\omega}\wedge\underline{v}'$ è sicuramente normale a Oxy quindi il suo contributo tende ad accelerare o rallentare la velocità di rotazione. Il problema afferma però che la vel. ang. è costante, quindi il dispositivo vincolare è tale che ci sono delle <u>reazioni che annullano tutti i contributi della forza di Coriolis</u> (esercitata sui vari punti del sistema).

La forza centrifuga tende invece ad allontanare i punti dall'asse y. Infatti, essa esercita le forze

$m\Omega^2\overrightarrow{P_*Q}$ e $m\Omega^2\overrightarrow{P_*P}$

sui 2 p.ti materiali Q e P (entrambi di massa m), dove P_* è la proiezione di P (e anche di Q) sull'asse y.

Il potenziale centrifugo è quindi dato da $U_{rot} = -\frac{m\Omega^2}{2}\overline{P_*Q}^2 - \frac{m\Omega^2}{2}\overline{P_*P}^2$,
dove però il primo ~~t~~ addendo è sempre nullo, perché $\overline{P_*Q} = 0$ (siccome ora c'è un nuovo vincolo che ~~ob~~ obbliga Q a stare sull'asse delle ordinate).
Si noti che in U_{rot} non consideriamo il contributo relativo all'energia potenziale centrifuga esercitata sull'anello (o ruota) centrale, anche se esso (essa) ha massa. Non consideriamo quel contributo perché esso non dipende dalla posizione di P (e neppure da quella di Q); per rendersene conto basta immaginare di scrivere l'integrale che esprime quel contributo di energia potenziale: esso ~~sarebbe~~ è sempre lo stesso indipendentemente dalla posizione di Q (e, ovviamente di P).
La Lagrangiana $\mathcal{L}_\xi(\xi,\dot\xi)$ per il sistema di riferimento non inerziale (soggetto al nuovo vincolo che impone $\vartheta = 0$) si calcola facilmente a partire da quella iniziale nel modo seguente:

$$\mathcal{L}_\xi(\xi,\dot\xi) = L(\xi,\vartheta,\dot\xi,\dot\vartheta)\Big|_{\substack{\vartheta=0\\ \dot\vartheta=0}} - U_{rot}(\xi),$$

dove $U_{rot}(\xi) = -\frac{m\Omega^2\xi^2}{2}$, perché $\overline{P_*P} = |\xi|$ quando

$P_* \equiv Q$. Possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{L}_\xi(\xi,\dot\xi) = \frac{1}{2}m\dot\xi^2 - \frac{1}{2}k\xi^2 + \frac{1}{2}m\Omega^2\xi^2,$$

dove sono state omesse alcune costanti additive, perché non sono significative.
La corrispondente eq. di Lagrange che descrive il moto di P è quindi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}_\xi}{\partial\dot\xi} - \frac{\partial\mathcal{L}_\xi}{\partial\xi} = m\ddot\xi + k\xi - m\Omega^2\xi = 0$$

$$\Rightarrow \ddot\xi + (\omega^2 - \Omega^2)\xi = 0$$ dove $\omega^2 = \frac{k}{m}$ è la ben nota espressione della velocità angolare per l'oscillatore armonico.

Possiamo ora scrivere la legge del moto di P, distinguendo tre casi principali.

Caso $\omega > |\Omega|$ (cioè la rotazione è "lenta" rispetto alla vel. ang. associata alla molla)

Stiamo ancora studiando un'eq. di Newton del tipo di quella dell'oscillatore armonico (per rendersene conto si ponga $\alpha^2 = \omega^2 - \Omega^2 > 0$ e si scriva $\ddot\xi + \alpha^2\xi = 0$), quindi

$$\xi(t) = A\cos\left(\sqrt{\omega^2-\Omega^2}\,t + \varphi\right)$$ dove A e φ sono costanti di integrazione che si determinano facilmente, una volta note le condizioni iniziali.

Caso $|\Omega| > \omega$ (cioè la rotazione è "veloce")

In questo caso l'eq. del moto è analoga a quella di Newton per il repulsore armonico ~~quindi~~ (per rendersene conto si ponga $\beta^2 = \Omega^2 - \omega^2 > 0$ e si scriva $\ddot{\xi} = \beta^2 \xi$), quindi

$$\xi(t) = a\, e^{\sqrt{\Omega^2-\omega^2}\, t} + b\, e^{-\sqrt{\Omega^2-\omega^2}\, t}$$

dove a e b sono costanti di integrazione.

Caso $|\Omega| = \omega$

In questo caso l'eq. del moto è analoga a quella di Newton per di un corpo non soggetto a forze; infatti,

$$\ddot{\xi} = 0$$

$$\Longrightarrow \xi(t) = vt + \xi_0$$

, dove ovviamente le costanti di integrazione v e ξ_0 sono banalmente determinate dalle cond. iniz. Infatti,

$$\xi_0 = \xi(0) \text{ e } v = \dot{\xi}(0).$$

Il caso in cui $\Omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$ è quello in cui il moto di P è con velocità uniforme.

4) Si supponga che il vincolo introdotto al punto 3 sia rimosso, mentre viene aggiunto un nuovo vincolo in modo tale che il punto P sia sempre sovrapposto al punto Q (il quale ora può muoversi ~~in una~~ sulla circonferenza ~~di~~ raggio R e con centro nel l'origine).

~~La nuova Lagrangiana~~ Si calcoli il periodo nel limite delle piccole oscillazioni attorno a tutti i punti di equilibrio stabile del sistema.

La nuova Lagrangiana $\mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}_\theta(\theta,\dot\theta)$ si determina facilmente, a partire da quella iniziale, imponendo la condizione $\xi = 0$ che descrive il nuovo vincolo. Possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{L}_\theta(\theta,\dot\theta) = L(\xi,\theta,\dot\xi,\dot\theta)\Big|_{\substack{\xi=0\\ \dot\xi=0}} =$$

$$= \left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot\theta^2 + 2mgR\cos\theta - \frac{1}{2}kR^2\cos^2\theta$$

Siamo quindi in presenza di un problema di meccanica unidimensionale per un punto localiz zato dalla coordinata $\vartheta \in \mathbb{T}$, la cui "massa" vale $(M+2m)R^2$ (che, dimensionalmente, è un'inerzia, non è una massa) ~~ed~~ ed è soggetto a una forza conservativa ~~[illegible]~~ corrispondente all'energia potenziale

$$U(\vartheta) = -2mgR\cos\vartheta + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\vartheta .$$

Per determinare i punti di equilibrio, calcoliamo

$$U'(\vartheta) = 2mgR\sin\vartheta - kR^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$= R\left(2mg - kR\cos\vartheta\right)\sin\vartheta ;$$

inoltre, studiamo

$U'(\vartheta) = 0$, che, quando $\frac{kR}{2mg} \leq 1$, ammette $\vartheta = 0, \pi$ come uniche soluzioni.

Inoltre, quando $\frac{kR}{2mg} > 1$, l'eq. $U'(\vartheta) = 0$ ammette come soluzioni $\vartheta = 0, \pi, \pm\beta$ con $\beta = \operatorname{acos}\frac{2mg}{kR}$.

Determiniamo i punti di eq. <u>stabili</u>.

Quando $\frac{kR}{2mg} \leq 1$ abbiamo che U è crescente $\forall\, \vartheta \in (0,\pi)$, mentre è decrescente $\forall \vartheta \in (-\pi, 0)$; ne segue che $\theta = 0$ è un p.to di eq. STABILE, mentre $\theta = \pi$ è INSTABILE.

Quando $\frac{kR}{2mg} > 1$ abbiamo che U è crescente per $\theta \in (-\beta, 0)$ e $\theta \in (\beta, \pi)$, mentre è decrescente per $\theta \in (-\pi, -\beta)$ e $\theta \in (0, \beta)$. Di conseguenza, $\theta = \pm\beta$ sono 2 p.ti di equilibrio STABILI, mentre $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono p.ti di equilibrio INSTABILI.

Osservazione: ovviamente le conclusioni riguardo a questo nuovo problema a 1 grado di libertà sono in accordo con quelle descritte al punto 2 a proposito del problema a 2 gradi di libertà descritto all'inizio di questo testo.

Per calcolare il periodo $T_{p.o.}$ nel limite delle piccole oscillazioni attorno a un p.to di equilibrio stabile $\bar{\theta}$, si utilizza la ben nota formula

$$T_{p.o.} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{U''(\bar{\theta})}}$$

dove la "massa" μ nel nostro caso è uguale a $(M+2m)R^2$.

Siamo quindi in grado di calcolare i periodi (nel limite delle piccole oscillazioni) che ci sono stati richiesti:

- Caso $\frac{kR}{2mg} \leq 1$

L'unico p.to di equilibrio stabile è $\vartheta = 0$ ed è t.c. $U''(0) = 2mgR - kR^2 \geq 0$ (il segno di $=$ vale solo quando $\frac{kR}{2mg} = 1$).

$$\Rightarrow T_{p.o.} = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)R^2}{2mgR - kR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{\frac{2mg}{R} - k}}$$

- Caso $\frac{kR}{2mg} > 1$

I p.ti di equilibrio stabili sono $\vartheta = \pm\beta$ e sono tali che

$$U''(\pm\beta) = 2mgR\cos\beta - kR^2(2\cos^2\beta - 1)$$

$$= 2mg\cancel{R}\cdot\frac{2mg}{k\cancel{R}} - 2k\cancel{R^2}\frac{4m^2g^2}{k^2\cancel{R^2}} + kR^2$$

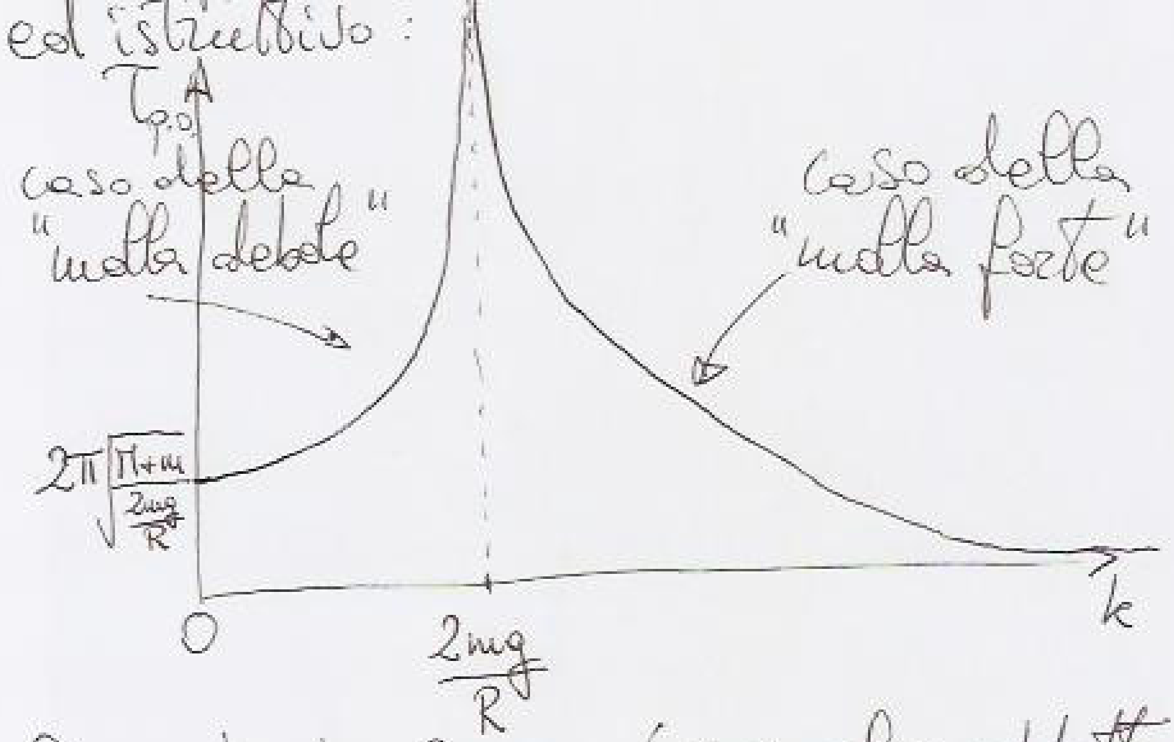
$$= kR^2 - \frac{4m^2g^2}{k} > 0$$ (ovviamente, altrimenti $\vartheta = \pm\beta$ non sarebbero p.ti di min).

$$\Rightarrow T_{p.o.} = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)R^2}{kR^2 - \frac{4m^2g^2}{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{k - \frac{4m^2g^2}{kR^2}}}$$

Ci limitiamo ora a discutere 2 osservazioni finali

Oss. finale 1:

L'andamento del periodo delle piccole oscillazioni in funzione della costante elastica k (quando gli altri parametri sono fissati) è molto semplice ed istruttivo:



Quando $k = \frac{2mg}{R}$ (cioè nel cosiddetto "caso critico"), $\theta = 0$ è un p.to di minimo quartico del potenziale ed è ben noto che, in ~~quella condizione~~ tale situazione, il limite del periodo delle piccole oscillazioni è $+\infty$.

Oss. finale 2:

Il comportamento del sistema (in questo quarto punto dell'esercizio) è esattamente analogo a quello di un pendolo rotante. Infatti, riscalando opportunamente i parametri, l'eq. di Lagrange può essere posta nella forma tipica del pendolo rotante!