

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
24 Luglio 2014

Un sistema meccanico è costituito da un anello e da due punti materiali Q e P , che si muovono in un piano di riferimento **verticale** e **inerziale** Oxy . L'anello (o, in altri termini, la ruota di spessore infinitesimo) è di raggio R e di massa M ; inoltre, esso è tale che la densità di massa al suo interno è omogenea ed è vincolato in modo da poter ruotare attorno al suo centro che, però, non si può spostare dall'origine O . Il punto Q è di massa m , giace sull'anello ed è solidale ad esso. Al punto Q è incernierata una guida rettilinea, di massa trascurabile e di lunghezza infinita, in modo tale che essa sia sempre parallela all'asse delle ascisse. Su tale guida, è libero di muoversi il punto P , di massa m . Due molle ideali fanno parte del sistema meccanico: la prima, ha i suoi estremi in corrispondenza ai punti P e Q ; la seconda, collega Q alla sua proiezione Q^* sull'asse delle ascisse. Entrambe queste molle sono di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. La massa del punto Q^* è trascurabile

I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il moto, i punti P , Q , Q^* e l'anello possono attraversarsi tra loro senza scontrarsi. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3) Si supponga ora che il sistema sia soggetto a un *ulteriore* vincolo, realizzato in modo tale che il punto Q giaccia costantemente sull'asse delle ordinate e al di sotto dell'origine (si noti che questo ulteriore vincolo impedisce all'anello di ruotare). Inoltre, si studi il riferimento quando esso non è inerziale, perché tutto il sistema ora è da considerarsi in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante uguale a $\Omega \neq 0$.

Al variare del valore di Ω , si scriva esplicitamente la legge del moto di P sulla guida orizzontale. In particolare, si verifichi che esistono dei valori di Ω per cui il corrispondente moto è rettilineo uniforme.

- (4) Si riconsideri il sistema come descritto all'inizio del testo, cioè l'anello è nuovamente in grado di ruotare (perché viene rimosso il vincolo provvisoriamente introdotto al punto (3)) e il riferimento è ora di tipo inerziale

(equivalentemente, sia $\Omega = 0$). Inoltre, si supponga che il sistema sia soggetto a un *ulteriore* vincolo, realizzato in modo tale che il punto P sia ora costantemente sovrapposto al punto Q .

Per ciascuna delle configurazioni di *equilibrio stabile* del sistema, si calcoli il periodo nel limite delle piccole oscillazioni di Q (e, quindi, di P) attorno a quella stessa situazione di equilibrio.