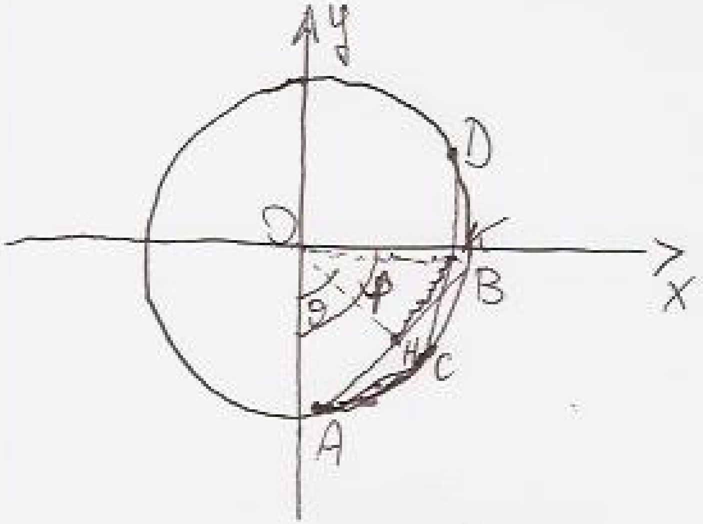



Esame Giugno 2014



massa asta $AB = M$

" " $CD = M$

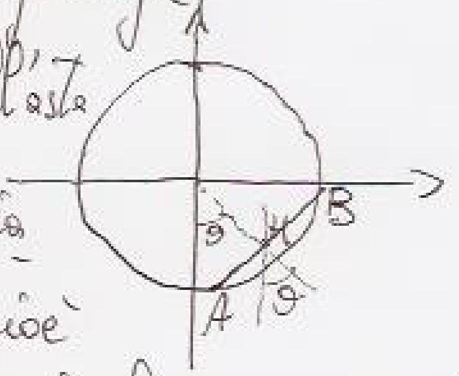
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 2R$

$\overline{AB} = \overline{CD} = 2R\sqrt{3}$

$\overline{AH} = \overline{HB}$, $\overline{CK} = \overline{KD}$

costante molla tra H e K $= k$

1) Lagrangiana ed equazioni di Lagrange




Per calcolare l'energia cinetica dell'asta in funzione della coordinata lagrangiana che ne individua la posizione (cioè l'angolo $\vartheta$, nel caso dell'asta AB, come in fig. qui sopra), applichiamo il teorema che ci consente di separare i contributi dell'energia cinetica "come se tutta la massa fosse nel baricentro" e quella dovuta allo spin, cioè $T_{AB} = \frac{1}{2} M \underline{v}_H \cdot \underline{v}_H + T_{S;AB}$

Dalla figura è evidente che $\vartheta$ è anche l'angolo che descrive la rotazione dell'asta rispetto a un asse di riferimento (ad es. quella verticale discendente). Di conseguenza, $T_{S;AB} = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2$ dove $I$ è il momen

to d'inerzia calcolato rispetto all'asse uscente 
rispetto al piano della figura e passante per $H$.
E' ben noto che

$$I = \delta \cdot \int_{-\ell/2}^{\ell/2} d\rho\, \rho^2 = \frac{\delta \rho^3}{3}\Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{\delta \ell^3}{12} = \frac{M\ell^2}{12},$$

dove $\delta = \frac{M}{\ell}$ è la densità di massa omogenea dell'asta, mentre $\ell$ è la lunghezza dell'asta, cioè $\ell = 2R\sqrt{3}$.
Sappiamo ora, quindi, che l'energia cinetica totale del sistema è

$$T = \frac{1}{2} M \underline{v}_H \cdot \underline{v}_H + \frac{1}{2} M R^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} M \underline{v}_K \cdot \underline{v}_K + \frac{1}{2} M R^2 \dot\varphi^2,$$

da cui è evidente che stiamo assumendo gli angoli $\theta$ e $\varphi$ (definiti come in figura iniziale) come coordinate lagrangiane.
Dobbiamo quindi calcolare coordinate e velocità dei baricentri delle due aste:

Coord. di $H$: $\overline{OH} \cdot (\sin\theta, -\cos\theta) = \sqrt{4R^2 - 3R^2} \cdot (\sin\theta, -\cos\theta) = R(\sin\theta, -\cos\theta)$

Coord. di $K$: $R(\sin\varphi, -\cos\varphi)$

$\underline{v}_H = R\dot\theta(\cos\theta, \sin\theta)$, $\underline{v}_K = R\dot\varphi(\cos\varphi, \sin\varphi)$

Possiamo ora scrivere l'espressione dell'energia cinetica totale in funzione delle coordinate lagrangiane:
$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 =$$
$$= MR^2\dot{\theta}^2 + MR^2\dot{\varphi}^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, cominciamo a scrivere
$$U = Mgy_H + Mgy_K + \frac{1}{2}k\overline{HK}^2,$$
dove abbiamo utilizzato il ben noto fatto che l'insieme delle forze di gravità (quando il campo di accelerazione $g$ è costante) agenti su ogni singolo punto del corpo rigido è equivalente alla forza che ~~si ottiene~~ agisce "come se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro"!

Calcoliamo a parte
$$\overline{HK}^2 = R^2\left[(-\cos\theta + \cos\varphi)^2 + (\sin\theta - \sin\varphi)^2\right]$$
$$= R^2\left[\cos^2\theta + \cos^2\varphi - 2\cos\theta\cos\varphi + \sin^2\theta + \sin^2\varphi - 2\sin\theta\sin\varphi\right]$$
$$= R^2\left[2 - 2\cos(\theta - \varphi)\right]$$

Ne segue che
$$U = -MgR\cos\theta - MgR\cos\varphi - kR^2\cos(\theta - \varphi),$$
a meno di costanti additive inessenziali.

Finalmente, possiamo scrivere la lagrangiana:

$$L = MR^2\dot{\theta}^2 + MR^2\dot{\varphi}^2 + MgR\cos\theta + MgR\cos\varphi + kR^2\cos(\theta-\varphi).$$

e le eq. di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 2MR^2\ddot{\theta} + MgR\sin\theta + kR^2\sin(\theta-\varphi) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 2MR^2\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi + kR^2\sin(\varphi-\theta) = 0 \end{cases}$$

2) Equilibri e stabilità -

Per determinare i p.ti di equilibrio, dobbiamo risolvere il seguente sistema di equazioni:

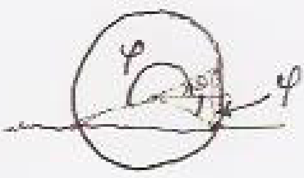
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial\theta} = MgR\sin\theta + kR^2\sin(\theta-\varphi) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial\varphi} = MgR\sin\varphi + kR^2\sin(\varphi-\theta) = 0 \end{cases}$$

Sommando le equazioni membro a membro si ottiene: $MgR(\sin\theta + \sin\varphi) = 0 \Rightarrow \sin\theta = -\sin\varphi$.

Tale equazione trigonometrica, ammette come

Soluzioni $\theta = -\varphi$ e $\theta = \pi + \varphi$.

Per convincersene, basta pensare al metodo grafico di ricerca delle soluzioni sul cerchio trigonometrico.



Imponiamo $\theta = -\varphi$ nella $\underline{II}$ eq. e otteniamo

$$MgR \sin\varphi + kR^2 \sin 2\varphi = R\sin\varphi \cdot (Mg + 2kR\cos\varphi) = 0$$

$$\Longrightarrow \sin\varphi = 0 \quad \text{oppure} \quad \cos\varphi = -\frac{Mg}{2kR}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$\varphi = 0, \pi$ $\qquad$ $\varphi = \pm\beta$ con $\beta = \operatorname{acos}\left(-\frac{Mg}{2kR}\right)$,

questa soluzione $\exists$ sse $\frac{Mg}{2kR} \leq 1$.

Siccome $\theta = -\varphi$, allora i corrispondenti p.ti di equilibrio sono

$$(\theta, \varphi) = (0,0), (\pi,\pi), (\pm\beta, \mp\beta).$$

Per trovare altre soluzioni, imponiamo $\theta = \pi + \varphi$ nella II eq. e otteniamo

$$MgR \sin\varphi + kR^2 \sin(-\pi) = MgR\sin\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow \sin\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = 0, \pi$$

Siccome $\theta = \pi + \varphi$, allora i corrispondenti p.ti di equilibrio sono $(\theta,\varphi) = (0,\pi), (\pi, 0)$.

Riassumendo, l'insieme dei p.ti di equilibrio è costituito da: $(\vartheta, \varphi) = \{(0,0), (\pi, \pi), (\pi, 0), (0, \pi), (\pm\bar{\vartheta}, \pm\bar{\varphi})\}$
dove l'ultima coppia di p.ti $\exists$ sse

$$\frac{Mg}{2kR} < 1 .$$

Per poter discutere efficacemente la stabilità, calcoliamo l'Hessiano:

$$\text{Hess}\, U = \begin{pmatrix} MgR\cos\vartheta + kR^2\cos(\vartheta-\varphi) & -kR^2\cos(\vartheta-\varphi) \\ -kR^2\cos(\vartheta-\varphi) & MgR\cos\varphi + kR^2\cos(\varphi-\vartheta) \end{pmatrix}$$

Caso $(0,0)$:

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\vartheta=0\\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} MgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & MgR + kR^2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è: $\det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\vartheta=0\\ \varphi=0}} = M^2g^2R^2 + 2MgR\cdot kR^2 > 0$

Siccome la traccia è evidentemente positiva, allora abbiamo 2 autoval. pos. $\Rightarrow (0,0)$ è STABILE.

Caso $(\pi, \pi)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\vartheta=\pi\\ \varphi=\pi}} = \begin{pmatrix} -MgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & -MgR + kR^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det \mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \varphi=\pi}} = MgR^2(Mg - 2kR) \gtreqless 0$

quando $\dfrac{Mg}{2kR} \gtreqless 1$, quindi

Se $\dfrac{Mg}{2kR} < 1$, abbiamo 1 autoval. neg. (e 1 pos.)

$\Rightarrow (\pi, \pi)$ è INSTABILE

Se $\dfrac{Mg}{2kR} > 1$, siccome la traccia $-2R(Mg - kR)$ è negativa, allora 2 autoval. neg. $\Rightarrow (\pi, \pi)$ è INST.

Se $\dfrac{Mg}{2kR} = 1$, il det. è nullo, ma la traccia

$-2R\,(Mg - kR) = -2kR^2 < 0$

$\Rightarrow$ 1 autoval. neg. (e 1 nullo) $\Rightarrow (\pi, \pi)$ è INST.

Caso $(0, \pi)$

$$\mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=\pi}} = \begin{pmatrix} MgR - kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & -MgR - kR^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det \mathrm{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=\pi}} = \cancel{k^2R^4} - M^2g^2R^2 \cancel{- k^2R^4} < 0 \Rightarrow$ 1 autoval. neg.

(e uno pos.) $\Rightarrow (0,\pi)$ è INSTABILE

Caso $(\pi, 0)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta=\pi \\ \varphi=0}} = \begin{pmatrix} -MgR-kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & MgR-kR^2 \end{pmatrix}$$

è analogo al caso precedente $\Rightarrow (\pi, 0)$ è instabile.

Casi $(\pm\beta, \mp\beta)$

$$\text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta=\pm\beta \\ \varphi=\mp\beta}} = \begin{pmatrix} MgR\cos\beta + kR^2\cos 2\beta & -kR^2\cos 2\beta \\ -kR^2\cos 2\beta & MgR\cos\beta + kR^2\cos 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta=\pm\beta \\ \varphi=\mp\beta}} = M^2g^2R^2\cos^2\beta + 2MgR\,kR^2\cos\beta\cos 2\beta,$$

andando a sostituire $\cos\beta$ con $-\frac{Mg}{2kR}$ e $\cos 2\beta$ con $\frac{2M^2g^2}{\cancel{4}2k^2R^2} - 1$, otteniamo

$$\det \text{Hess}\, U\Big|_{\substack{\theta=\pm\beta \\ \varphi=\mp\beta}} = M^2g^2R^2\left(\frac{M^2g^2}{4k^2R^2} - \frac{M^2g^2}{2k^2R^2} + 1\right) = M^2g^2R^2\left(1 - \frac{M^2g^2}{4k^2R^2}\right)$$

quando $\frac{Mg}{2kR} < 1 \Rightarrow$ il determinante è positivo

Altrimenti, per $\frac{Mg}{2kR}=1$ il determinante è nullo (si ricordi che per $\frac{Mg}{2kR}>1$ questa coppia di p.ti di eq. $\nexists$).

In entrambi i sottocasi (con determinante positivo o nullo), abbiamo che la traccia

$$2MgR\cos\beta+4kR^2\cos^2\beta-2kR^2=$$

$$=-\cancel{2}Mg\cancel{R}\frac{Mg}{\cancel{2}k\cancel{R}}+\cancel{4}k\cancel{R^2}\frac{M^2g^2}{\cancel{4}k^{\cancel{2}}\cancel{R^2}}-2kR^2$$

$$=\frac{-M^2g^2}{\cancel{k}}+\frac{M^2g^2}{\cancel{k}}-2kR^2<0$$

Ne segue che, se $\frac{Mg}{2kR}<1$ abbiamo 2 autoval. neg. e se $\frac{Mg}{2kR}$ abbiamo 1 autoval. neg. (e uno nullo)

$\longrightarrow$ $(\pm\beta,\mp\beta)$ sono sempre p.ti di eq. INSTABILI, quando esistono.

Riassumendo, abbiamo che il solo p.to di equilibrio ad essere stabile è $(0,0)$. Tutti gli altri sono instabili.

Si noti che la biforcazione di $(\pi,\pi)$, da cui emerge la coppia di equilibri $(\pm\beta,\mp\beta)$ NON cambia la instabilità del p.to $(\pi, \pi)$.

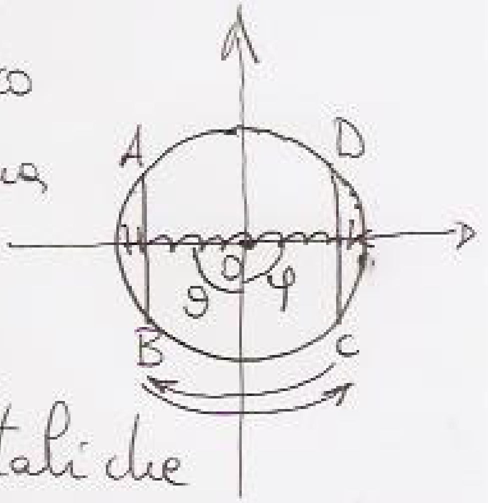
Infatti, quel che avviene è che cambia il segno di uno dei due autovalori di $(\pi, \pi)$ quando si passa da $\frac{Mg}{2kR} \geq 1$ a $\frac{Mg}{2kR} < 1$, ma l'altro autovalore è sempre negativo (quindi $(\pi,\pi)$ è INST).

$\Rightarrow$ La coppia di p.ti di equilibri che emerge (cioè $(\pm\beta, \mp\beta)$) ha entrambi gli autoval. neg.

3) A $t=0$, entrambe le aste siano in verticale

3A) da parti opposte e con velocità nulla.

Si dimostri che il moto è periodico e si esprima il suo periodo sotto forma di un integrale.




Le condizioni iniziali, riferite alle coordinate lagrangiane, ~~esp~~ sono tali che

$$\vartheta(0) = -\pi/2\ ,\ \varphi(0) = \pi/2\ ,\ \dot\vartheta(0) = \dot\varphi(0) = 0$$

(come vedremo in seguito, questo è equivalente anche al caso $\vartheta(0) = \pi/2$, $\varphi(0) = -\pi/2$ ) –

E' abbastanza intuitivo che il moto che fa seguito a queste condizioni iniziali prevede delle oscil

lazioni tali che $\vartheta(t) = -\varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Dimostriamo che ciò è vero.
Cominciamo ad osservare che se ciò fosse vero, allora la I$^a$ eq. di Lagrange diventerebbe

$$2MR^2\ddot{\vartheta} + MgR\sin\vartheta + kR^2\sin 2\vartheta = 0$$

Usiamo ora l'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy con condizioni iniziali
$\vartheta(0) = -\pi/2$ e $\dot{\vartheta}(0) = 0$ per affermare che $\exists$ una legge del moto $t \mapsto \Psi(t)$ t.c. essa è soluzione di →

$$\begin{cases} 2MR^2\ddot{\vartheta} + MgR\sin\vartheta + kR^2\sin 2\vartheta = 0 \\ \vartheta(0) = -\pi/2 \\ \dot{\vartheta}(0) = 0 \end{cases}$$

quando, ovviamente, si pone $\vartheta(t) = \Psi(t)$.
Siccome l'eq. diff. del problema precedente è evidentemente dispari, allora si osserva immediatamente che $\varphi(t) = -\Psi(t)$ è anche soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2MR^2\ddot{\varphi} + MgR\sin\varphi + kR^2\sin 2\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \pi/2 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

Siccome $\vartheta(t) - \varphi(t) = 2\Psi(t) = 2\vartheta(t)$ e $\varphi(t) - \vartheta(t) = -2\Psi(t) = 2\varphi(t)$, ogni qualvolta che $\vartheta(t) = \Psi(t)$ e $\varphi(t) = -\Psi(t)$, allora ne segue che la legge del moto

$$t \mapsto \left(\vartheta(t)=\Psi(t),\ \varphi(t)=-\Psi(t)\right)$$

è <u>soluzione</u> del problema di Cauchy completo

$$\begin{cases} 2MR^2\ddot{\vartheta}+MgR\sin\vartheta+kR^2\sin(\vartheta-\varphi)=0 \\ 2MR^2\ddot{\varphi}+MgR\sin\varphi+kR^2\sin(\varphi-\vartheta)=0 \\ \vartheta(0)=-\pi/2,\ \varphi(0)=\pi/2,\ \dot{\vartheta}(0)=0,\ \dot{\varphi}(0)=0. \end{cases}$$

Essendo soluzione, per <u>l'unicità</u> della soluzione dei problemi di Cauchy (sufficientemente regolari, come in questo caso), allora $\left(\vartheta(t)=\Psi(t),\ \varphi(t)=-\Psi(t)\right)$ è <u>l'unica soluzione</u>.

Abbiamo quindi dimostrato che il moto che fa seguito alle condizioni iniziali è tale che le due aste hanno sempre lo stesso angolo (che individua il baricentro rispetto all'asse verticale) <u>in valore assoluto, ma opposto in segno</u>. Andiamo ora a studiare l'andamento di $\Psi(t)$. Per farlo, ripartiamo dal problema di Cauchy di cui è soluzione, ovvero

$$\begin{cases} 2MR^2\ddot{\Psi}+MgR\sin\Psi+kR^2\sin 2\Psi=0 \\ \Psi(0)=-\pi/2,\ \dot{\Psi}(0)=0 \end{cases}$$

Possiamo interpretare l'eq. diff. come un problema di meccanica conservativa a 1 grado di libertà, cioè del tipo

$$2MR^2\ddot{\psi} + \frac{dU}{d\psi} = 0$$

dove interpretiamo come energia potenziale la funzione

$$U = \int d\psi \left(MgR\sin\psi + kR^2\sin 2\psi\right) =$$

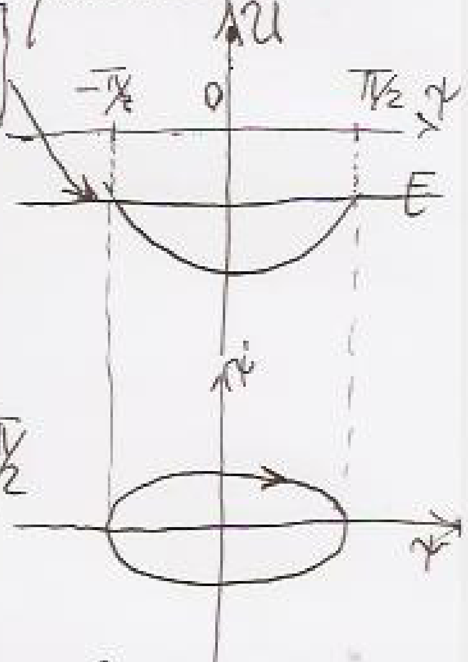
$$= -MgR\cos\psi - \frac{kR^2}{2}\cos 2\psi,$$

mentre $2MR^2$ gioca "il ruolo della massa".
Di conseguenza, si conserva l'energia

$$E = MR^2\dot{\psi}^2 - MgR\cos\psi - \frac{kR^2}{2}\cos 2\psi$$

Effettuiamo una brevissima analisi qualitativa del moto. Osserviamo che

Errore! E è >0 non è neg.!




$U' = MgR\sin\psi + kR^2\sin 2\psi$ è sicuramente positivo in $(0, \pi/2)$ ed è neg. in $(-\pi/2, 0)$.

Inoltre U è evidentemente pari $\Longrightarrow$ $\psi(t)$ ha una barriera di pot. sin. in $\psi_- = \psi(0) = -\pi/2$ (perché $\dot{\psi}(0) = 0$ e $U'(-\pi/2) < 0$) e una barriera a destra in $\psi_+ = \pi/2$.

Dopo aver disegnato il grafico del potenziale U (limitatamente all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$), il ritratto in fase evidenzia

che il moto è evidentemente periodico.
Utilizzando la ben nota formula che ci fornisce il periodo in problemi di mecc. 1D, otteniamo

$$T = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{MR^2}\left(\bar{E}-U(\psi)\right)}}$$

dove $\bar{E} = U(\pm\pi/2) = \frac{kR^2}{2}$ e $U(\psi) = -MgR\cos\psi - \frac{kR^2}{2}\cos 2\psi$

Siccome $\theta(t)=\psi(t)$ e $\varphi(t)=-\psi(t)$, allora $T$ è anche il periodo di oscillazione

3B) Consideriamo ora delle condizioni iniziali analoghe a quelle precedenti, tali che le aste a $t=0$ si trovano (di nuovo) in posizione simmetrica rispetto all'asse $y$ e con velocità nulla; a $t=0$ sia però $\alpha=\pi/3$ dove $\alpha$ è l'ampiezza iniziale di $H\hat{O}K$. Si determinino 2 valori espliciti $T_-$ e $T_+$ tali che

$$T_- \leq T \leq T_+$$

Nel caso $Mg = 2kR$

dove $T$ è il periodo di oscillazione. Tale stima deve avere un margine di incertezza non superiore al 50%.

Si possono ripetere tutte le considerazioni precedentemente effettuate al punto 3A, a proposito della sol. del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2MR^2\ddot{\psi} + MgR\sin\psi + kR^2\sin 2\psi = 0 \\ \psi(0) = -\alpha/2 = -\pi/6 \\ \dot{\psi}(0) = 0 \end{cases}$$

Avremo quindi che il moto è periodico con periodo

$$T = 2\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{d\psi}{\sqrt{\frac{1}{MR^2}\left(U(\pm\pi/12) - U(\psi)\right)}}$$

Utilizziamo la stima abituale

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{\max\limits_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} U''(x)}} \leq T \leq 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{\min\limits_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} U''(x)}} = T_+ ,$$

dove $U''(\psi) = MgR\cos\psi + 2kR^2\cos 2\psi$.

Osserviamo che entrambi gli addendi ($MgR\cos\psi$ e $2kR^2\cos 2\psi$) sono funzioni pari che crescono in $[-\pi/6, 0)$ e decrescono in $(0, \pi/6]$ $\Longrightarrow$ $\max\limits_{x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} U''(x) = U''(0) = MgR + 2kR^2 = 4kR^2$

e $\min\limits_{x\in[-\pi/12,\pi/12]} U''(x) = U''(\pi/12) = MgR\cos\frac{\pi}{6} + 2kR^2\frac{1}{2} =$

$= kR^2(\sqrt{3}+1)$

Otteniamo quindi la stima richiesta

con $T_- = 2\pi\sqrt{\dfrac{2M\cancel{R^2}}{4k\cancel{R^2}}}$ e $T_+ = 2\pi\sqrt{\dfrac{2M\cancel{R^2}}{(\sqrt{3}+1)k\cancel{R^2}}}$

Per valutare l'accuratezza della stima, sovrastimiamo l'errore relativo come segue:

semi-ampiezza intervallo di errore

$$\frac{\dfrac{T_+ - T_-}{2}}{T_-} = \frac{\cancel{2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}}\left(\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\dfrac{1}{2}}{\cancel{2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}}\;\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

sottostima del valore vero

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}105 < 11\%$$

La stima $T_- \leq T \leq T_+$ con i suddetti valori di $T_-$ e $T_+$ soddisfa tutte le condizioni richieste.