

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
10 Giugno 2014

Un sistema meccanico è costituito da due aste rigide con densità di massa omogenea al loro interno, che si muovono in un piano **verticale** Oxy . Entrambe sono di massa M e di lunghezza $2R\sqrt{3}$. Tanto gli estremi A e B della prima asta, quanto gli estremi C e D della seconda sono vincolati a muoversi su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $2R$. Una molla ideale, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, collega tra loro i punti medi H e K delle due aste.

I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il loro moto, le due aste si possono attraversare senza scontrarsi. Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne studi la stabilità al variare dei parametri.
- (3A) Si supponga che al tempo iniziale $t = 0$ entrambe le aste siano in posizione speculare rispetto all'asse delle ordinate e con velocità iniziale nulla; inoltre, a $t = 0$, sia l'ampiezza α dell'angolo $H\hat{O}K$ uguale a π (ciò equivale a chiedere che entrambe le aste siano inizialmente in quiete, in posizione verticale e opposte l'una all'altra).
Si dimostri che il moto che fa seguito alle suddette condizioni iniziali è *periodico* e se ne determini il periodo sotto forma di un opportuno integrale.
- (3B) Si considerino ora delle condizioni iniziali analoghe a quelle del punto (3A) in modo tale che al tempo $t = 0$ entrambe le aste siano nuovamente poste in posizione speculare rispetto all'asse delle ordinate e con velocità iniziale nulla; questa volta, a $t = 0$, sia l'ampiezza α dell'angolo $H\hat{O}K$ uguale a $\pi/3$ e entrambi i baricentri stiano inizialmente al di sotto dell'asse delle ordinate. Inoltre, si ponga $Mg = 2kR$.
Si dia una stima del periodo T del moto, determinando *esplicitamente* due numeri reali positivi T_- e T_+ tali che $T_- \leq T \leq T_+$, con errore relativo della stima inferiore al 50%.