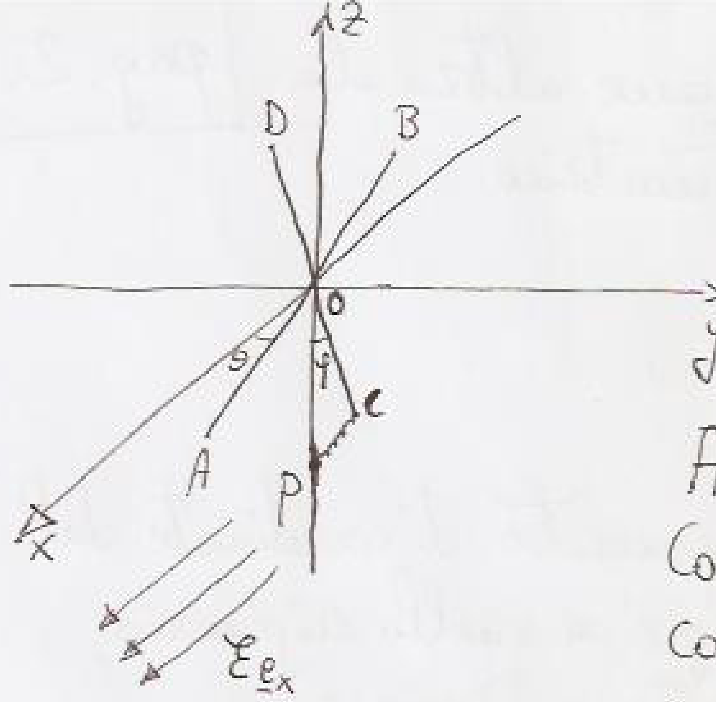


aste AB e CD con densità di massa omogenea.

$\overline{AB} = \overline{CD} = 2R$, massa AB = massa CD = $\frac{m}{}$

$\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{CO} = \overline{OD} = R$ $\hat{AOC} = \pi/2$

Coord. P : $(0, 0, -\ell/2)$

costante molla tra P e C = k

carica elettrica in C = q

campo elettrico = $\mathcal{E}\underline{e}_x$.

1- Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.

Prendiamo come coordinate libere o lagrangiane

θ e φ

dove (come si vede in figura) θ è l'angolo formato da OA con il semiasse delle x positive e φ è l'angolo formato da OC con il semiasse delle z negative.

Coordinate di A: $(R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$

Il calcolo delle coordinate di C richiede qualche accorgimento. Infatti, è conveniente scrivere le coord. di C rispetto al sistema di riferimento $Ox'y'z$ dove AB giace sull'asse x' e CD sta nel piano $Oy'z$. In tale sist. di riferimento le coordinate di A e C sono, rispettivamente, $(R, 0, 0)$ e $(0, R\sin\varphi, -R\cos\varphi)$.

A questo punto, non rimane altro da fare se non applicare il prodotto per la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la quale descrive il cambiamento di coordinate dal sistema di riferimento $Ox'y'z'$ a quello originario, quindi le coord. di C rispetto a $Oxyz$ sono

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R\sin\varphi \\ -R\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Si vede che queste coordinate verificano la condizione di ortogonalità con quelle di C; è, infatti, facile controllare che

$$\underbrace{(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, 0)}_{\text{coord. di } A} \cdot \underbrace{(-R\sin\varphi\sin\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, -R\cos\varphi)}_{\text{coord. di } C} = 0$$

Per effettuare il calcolo dell'energia cinetica T, è conveniente considerare due termini separatamente:

$$T = T_{AB} + T_{CD},$$

dove T_{AB} è l'energia cinetica dell'asta AB e T_{CD} quella dell'asta CD.

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\frac{mR^2}{3}\dot{\vartheta}^2,$$ dove abbiamo utilizzato il ben noto fatto che l'inerzia I di un'asta omogenea di massa m e lunghezza $l=2R$, rispetto alle rotazioni in un

 piano e attorno al suo baricentro,
è $I = \frac{ml^2}{12} = \frac{mR^2}{3}$.

Per quanto riguarda il calcolo di T_{CD} è conveniente cominciare a scrivere la velocità $\underline{v}$ di un generico p.to a distanza $\rho \in [-R, R]$ dall'origine, cioè

$$\underline{v} = \frac{d}{dt}\left(-\rho \sin\varphi \sin\theta, \rho \sin\varphi \cos\theta, -\rho\cos\varphi\right) =$$

$$= \left(-\rho\left(\dot\varphi \cos\varphi \sin\theta + \dot\theta \sin\varphi \cos\theta\right), \rho\left(\dot\varphi \cos\varphi \cos\theta - \dot\theta \sin\varphi \sin\theta\right), \rho\dot\varphi \sin\varphi\right)$$

Tenendo conto che la densità di massa δ sarà uguale a $\frac{m}{2R}$, abbiamo che

$$T_{CD} = \int_{-R}^{R} d\rho \frac{\delta v^2}{2} =$$

$$= \int_{-R}^{R} d\rho \frac{m\rho^2}{4R}\Big[\dot\varphi^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \dot\theta^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \cancel{2\dot\varphi\dot\theta \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta} +$$
$$+ \dot\varphi^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + \dot\theta^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta - \cancel{2\dot\varphi\dot\theta \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta} + \dot\varphi^2 \sin^2\varphi\Big] =$$

$$= \int_{-R}^{R} d\rho \frac{m\rho^2}{4R}\left(\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\,\dot\theta^2\right) = \frac{m}{4R}\left(\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\,\dot\theta^2\right) \frac{\rho^3}{3}\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{m}{\cancel{4R}_{2}} \frac{\cancel{2}^{1} R^{\cancel{3}\,2}}{3}\left(\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\,\dot\theta^2\right) = \frac{mR^2}{6}\left(\dot\varphi^2 + \sin^2\varphi\,\dot\theta^2\right).$$

A mo' di verifica, si possono considerare alcuni casi particolari. Ad esempio si noti che $T_{CD} = 0$ quando $\varphi = 0, \pi$ (cioè quando le nostre due aste ruotano attorno all'asse z, con CD sull'asse di rotazione), mentre quando $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, allora $T_{CD} = \frac{mR^2}{6}\dot\theta^2 = T_{AB}$ (questo è il caso in cui le 2 aste sono nel piano Oxy e ruotano attorno all'asse z).

E' intuitivo che entrambe le conclusioni, in questi 2 casi particolari, siano corrette!

Passiamo ora al calcolo dell'energia potenziale.
Siccome il baricentro di entrambe le aste è sempre in corrispondenza all'origine, è intuitivo che l'energia potenziale gravitazionale è sempre costante e quindi può essere omessa (perché non ha alcuna influenza sulle eq. del moto).
Scriviamo quindi

$$U = \frac{1}{2} k \overline{PC}^2 + U_{el},$$

dove $U_{el} = -q\mathcal{E}x_c$ è il potenziale dovuto agli effetti del campo elettrico $\mathcal{E}\underline{e}_x$ sulla carica q posizionata in C.
Calcoliamo $\overline{PC}^2$; tenendo conto che le coordinate di P sono $(0,0,-R)$, abbiamo che

$$\overline{PC}^2 = R^2\left(\sin^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta + 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) = R^2(2-2\cos\varphi)$$

Considerando i 2 termini che compongono l'energia potenziale, otteniamo

$$U = \frac{1}{2}kR^2(2-2\cos\varphi) + q\mathcal{E}R\sin\varphi\sin\theta = -kR^2\cos\varphi + q\mathcal{E}R\sin\varphi\sin\theta,$$

dove è stata omessa l'inessenziale costante additiva kR^2.
A questo punto possiamo scrivere la lagrangiana

$$L = \frac{mR^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2\right) + kR^2\cos\varphi - q\mathcal{E}R\sin\varphi\sin\theta$$

$$= \frac{mR^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 + (1+\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2\right) + kR^2\cos\varphi - q\mathcal{E}R\sin\varphi\sin\theta.$$

Calcoliamo le equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = \dfrac{mR^2}{3}\left(\ddot\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\,\dot\theta^2\right) + kR^2\sin\varphi + q\mathcal{E}R\cos\varphi\sin\theta = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \dfrac{mR^2}{3}\left[\left(1+\sin^2\varphi\right)\ddot\theta + 2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot\varphi\dot\theta\right] + q\mathcal{E}R\sin\varphi\cos\theta = 0 \end{cases}$$

2 - Determinare i p.ti di equilibrio al variare dei parametri e discuterne la stabilità limitatamente al caso in cui $kR = q\mathcal{E}$ -

Dobbiamo risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = kR^2\sin\varphi + q\mathcal{E}R\cos\varphi\sin\theta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = q\mathcal{E}R\sin\varphi\cos\theta = 0 \end{cases}$$

La seconda soluzione ammette le seguenti soluzioni:

$\varphi = 0, \pi$ $\Downarrow$ la 1ª eq. diventa $\pm q\mathcal{E}R\sin\theta = 0$ $\Downarrow$ $\theta = 0, \pi$

$\theta = \pm \pi/2$ $\Downarrow$ la 1ª equazione diventa

$$kR^{\cancel{2}}\sin\varphi \pm q\mathcal{E}\cancel{R}\cos\varphi = 0$$

$$\cancel{\sqrt{k^2R^2+q^2\mathcal{E}^2}}\left(\pm\frac{q\mathcal{E}}{\sqrt{k^2R^2+q^2\mathcal{E}^2}}\cos\varphi + \frac{kR}{\sqrt{k^2R^2+q^2\mathcal{E}^2}}\sin\varphi\right) = 0$$

Sia α t.c. $\cos\alpha = \dfrac{q\mathcal{E}}{\sqrt{k^2R^2+q^2\mathcal{E}^2}}$ e $\sin\alpha = \dfrac{kR}{\sqrt{k^2R^2+q^2\mathcal{E}^2}}$, allora possiamo riscrivere le (due!) equazioni

$$\pm\frac{q\mathcal{E}}{\sqrt{k^2R^2+q^2\mathcal{E}^2}}\cos\varphi+\frac{kR}{\sqrt{k^2R^2+q^2\mathcal{E}^2}}\sin\varphi=0$$

nel modo seguente

$$\cos(\varphi-\alpha)=0 \quad e \quad \cos(\varphi-(\pi-\alpha))=0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\varphi=\alpha\pm\pi/2 \qquad\qquad \varphi=\pi-\alpha\pm\pi/2=-\alpha\pm\pi/2$$

Riassumendo, i p.ti di equilibrio sono

$$(\varphi,\vartheta)\in\left\{(0,0),(0,\pi),(\pi,0),(\pi,\pi),\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(-\alpha\pm\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

Discutiamo ora la stabilità dei suddetti punti di equilibrio nel caso $kR=q\mathcal{E}\Rightarrow\alpha=\pi/4$, poiché

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad e \quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Al fine di determinare la stabilità, calcoliamo preliminarmente

$$\text{Hess}\,U=kR^2\begin{pmatrix}\cos\varphi-\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\cos\vartheta\\ \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

Consideriamo separatamente i vari p.ti di equilibrio

- Casi $(\varphi,\vartheta)=(0,0)$ oppure $(0,\pi)$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{\varphi=0\\ \vartheta=0,\pi}}=kR^2\begin{pmatrix}1 & \pm1\\ \pm1 & 0\end{pmatrix}$$

Siccome il determinante è evidentemente negativo, allora 1 autoval. è pos. e un altro è neg. $\Rightarrow$ p.ti di equilibrio INSTABILI

• Casi $(\varphi,\vartheta)=(\pi,0)$ oppure (π,π)

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{\varphi=\pi\\ \vartheta=0,\pi}} = kR^2\begin{pmatrix}-1 & \mp 1\\ \mp 1 & 0\end{pmatrix}$$

Siccome il det. è evidentemente negativo
$\Rightarrow$ 1 autoval. pos. e 1 neg.
$\Rightarrow$ p.ti di equilibrio INSTABILI

• Caso $(\varphi,\vartheta)=\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{\varphi=-\pi/4\\ \vartheta=\pi/2}} = kR^2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}$$

Entrambi gli autoval. sono positivi
$\Rightarrow$ p.to di equilibrio STABILE

• Caso $(\varphi,\vartheta)=\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{\varphi=3\pi/4\\ \vartheta=\pi/2}} = kR^2\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & -1/\sqrt2\end{pmatrix}$$

Entrambi gli autoval. sono neg.
$\Rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE

• Caso $(\varphi,\vartheta)=\left(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{\varphi=\pi/4\\ \vartheta=-\pi/2}} = kR^2\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}$$

Entrambi gli autoval. sono positivi
$\Rightarrow$ p.to di equilibrio STABILE

• Caso $(\varphi,\vartheta)=\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Hess}\,U\Big|_{\substack{\varphi=5\pi/4\\ \vartheta=-\pi/2}} = kR^2\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2} & 0\\ 0 & -1/\sqrt2\end{pmatrix}$$

Entrambi gli autoval. sono negativi
$\Rightarrow$ p.to di equilibrio INSTABILE

3 - Si studi ora il sistema nel caso in cui la carica elettrica è assente ($q = 0$), con k ed R generici. Si consideri il moto che fa seguito a condizioni iniziali tali che, al tempo $t = 0$,

- A giace sul semiasse delle x positive
- C " " " " y positive
- la velocità angolare di rotazione di A è ω_0
- " " " " " di C in verticale è Ω_0

3a - Si determinino le condizioni che devono essere soddisfatte da ω_0 e Ω_0 affinché la legge del moto è tale che C tende asintoticamente a raggiungere il semiasse delle z positive.

3b - Si determini il rapporto tra ~~la velocità~~ ω_0 e la velocità angolare di rotazione del p.to A nel limite di $t \to +\infty$.

Riscriviamo la lagrangiana nel caso $q = 0$, cioè

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 + \left(1 + \sin^2\varphi\right)\dot{\theta}^2\right) + kR^2\cos\varphi .$$

E' evidente che il sistema ammette due costanti del moto, poiché θ è una variabile ciclica e la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.

Si conservano quindi

$$p_\theta := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{mR^2}{3}\left(1 + \sin^2\varphi\right)\dot{\theta} ,$$

che ha le dimensioni fisiche di un momento angolare (o, equivalentemente, di un'azione), e l'energia

$$E = \frac{mR^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 + \left(1+\sin^2\varphi\right)\dot{\vartheta}^2\right) - kR^2\cos\varphi .$$

Facendo alcuni conti, si comprenderebbe facilmente che p_ϑ altro non è che la componente lungo l'asse z del momento angolare del sistema, usiamo quindi la più tradizionale lettera J per designarlo, cioè

$$J = \frac{mR^2}{3}\left(1+\sin^2\varphi\right)\dot{\vartheta} .$$

Le equazioni del moto sono risolubili con il metodo delle quadrature, che si applica dopo aver riscritto l'energia in modo da mettere in evidenza il potenziale efficace, cioè

$$E = \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{6} + \frac{J^2}{\frac{2}{3}mR^2\left(1+\sin^2\varphi\right)} - kR^2\cos\varphi$$

$$= \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{6} + U_{eff}(\varphi), \quad \text{dove } U_{eff}(\varphi) := \frac{3J^2}{2mR^2\left(1+\sin^2\varphi\right)} - kR^2\cos\varphi .$$

Studiamo sommariamente il grafico di $U_{eff}(\varphi)$ per comprendere quale è il moto tale che tende asintoticamente alla posizione verticale di C, al di sopra dell'origine. Calcoliamo

$$U'_{eff}(\varphi) = \left(\frac{-3J^2\cos\varphi}{mR^2\left(1+\sin^2\varphi\right)^2} + kR^2\right)\sin\varphi$$

Dalla formula precedente, segue immediatamente che φ ha un punto di massimo in $\varphi=\pi$, poiché il primo fattore ~~del membro di dx per~~ (che compare nell'espressione che definisce V_{eff}) è sicuramente positivo, mentre $\sin\varphi$ è positivo per $\varphi\in(0,\pi)$ e neg. per $\varphi\in(\pi,0)$.

Occorre studiare il segno di
$$f(\varphi) = -\frac{3J^2\cos\varphi}{mR^2(1+\sin^2\varphi)^2} + kR^2 ,$$
a questo scopo si ponga $u=\cos\varphi$ e si studi
$$g(u) = -\frac{u}{(2-u^2)^2} + \frac{mkR^4}{3J^2} \quad \text{per } u\in[-1,1];$$
siccome $f(\varphi)=f(-\varphi)$, le conclusioni si estenderanno facilmente dallo studio di $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ a quelle che ci servono per $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$.

Osserviamo che
$$g'(u) = -\frac{(2-u^2)^2+4u^2(2-u^2)}{(2-u^2)^4} = -\frac{2+3u^2}{(2-u^2)^3} \leq 0 \quad \forall u\in[-1,1],$$
Siccome $f(\varphi)=g(\cos\varphi)$, g è monotona decrescente e $\cos\varphi$ è monotona decrescente per $\varphi\in[0,\pi]$, allora f è a sua volta monotona crescente per $\varphi\in[0,\pi]$ (questa non è altro che un'applicazione banale della "regola della catena" per la derivazione di funzioni composte).

Come abbiamo osservato
$$f(\varphi) = g(\cos\varphi) > 0 \quad \text{quando } u\leq 0, \text{ cioè } \cos\varphi\leq 0, \text{ cioè } \varphi\in[-\pi,-\pi/2] \text{ o } \varphi\in[\tfrac{\pi}{2},\pi].$$

Invece, $f(0) = g(1)$ può essere positivo o nullo se

$$-1 + \frac{mkR^4}{3J^2} \geq 0 \rightarrow \frac{mkR^4}{3J^2} \geq 1,$$

mentre può essere negativo se $\frac{mkR^4}{3J^2} < 1$.

Nel caso $\frac{mkR^4}{3J^2} \geq 1$, $\varphi = 0$ è p.to di minimo per V_{eff};

invece, se $\frac{mkR^4}{3J^2} < 1$, $\varphi = 0$ è p.to di max relativo per V_{eff}.

In quest'ultimo caso, $\exists\, \bar{\varphi} \in (0, \pi/2)$ t.c.

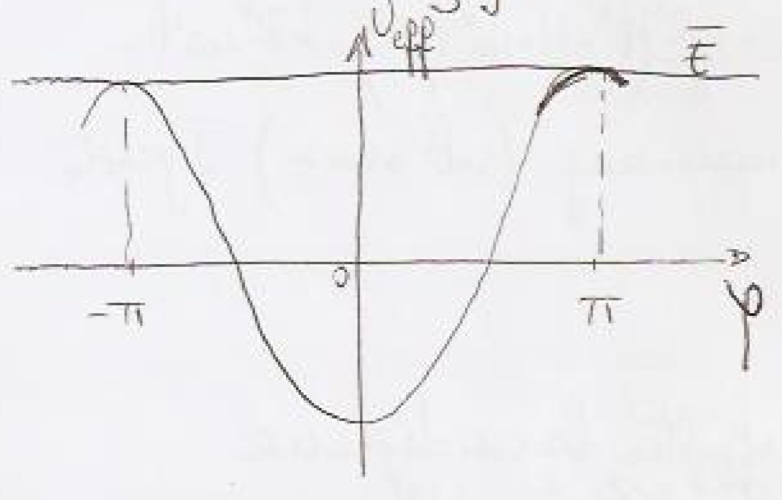
$$f(\cos\varphi) < 0 \text{ per } \varphi \in [0, \bar{\varphi}) \text{ e}$$

$$f(\cos\varphi) > 0 \text{ per } \varphi \in [\bar{\varphi}, \pi],$$

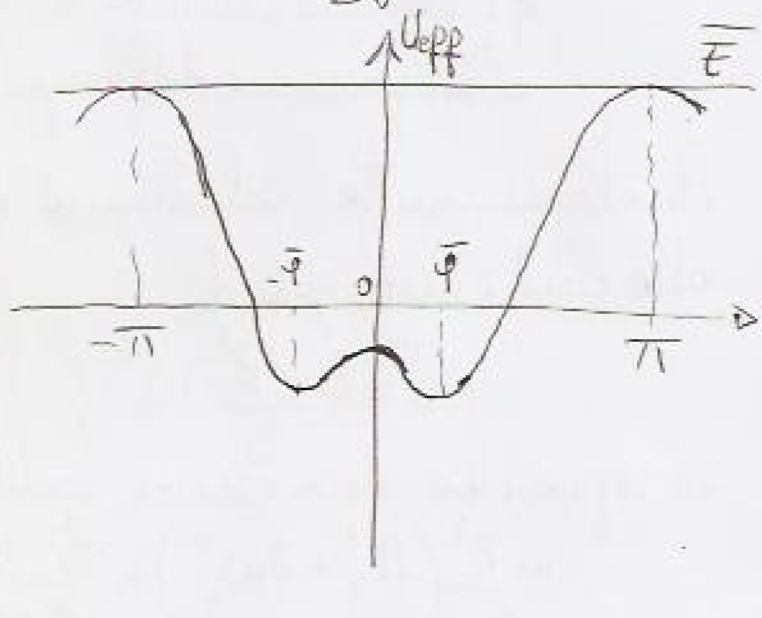
Siccome $V'_{eff} = f(\cos\varphi) \cdot \underbrace{\sin\varphi}_{>0 \text{ per } \varphi \in (0,\pi)}$, allora $\bar{\varphi}$ sarà ~~evidentemente~~ evidentemente un p.to di minimo per V_{eff}.

Riassumendo, possiamo avere 2 situazioni per quanto riguarda il grafico di V_{eff}.

Caso $\frac{mkR^4}{3J^2} \geq 1$



Caso $\frac{mkR^2}{3J^2} < 1$



Noi siamo interessati al livello di energia $\bar{E}$, cioè quello corrispondente al massimo assoluto di U_{eff}, cioè quello per cui ci sono moti sulla separatrice che tendono asintoticamente a $\varphi = \pi$ (che corrisponde alla situazione in cui C è sul semiasse positivo delle z):

Siccome ~~U_{max}~~ $\bar{E} = U_{eff}(\pi)$ è il massimo del potenziale efficace, allora non ci saranno barriere di potenziale che impediscono al moto sulla separatrice di tendere a $\varphi = \pm\pi$ per $t \to \pm\infty$ (questa è l'unica vera conclusione riguardante lo studio del grafico di U_{eff} che ci permette di risolvere l'esercizio: questa affermazione poteva essere ottenuta con semplicissime osservazioni riguardanti U_{eff}!).

Dobbiamo quindi imporre che

$$E = \frac{mR^2}{6}\left(\Omega_0^2 + 2\omega_0^2\right) = U_{eff}(\pi) = \frac{3J^2}{2mR^2} + kR^2$$

qui abbiamo sostituito le cond. iniz. $\varphi(0) = \pi/2$, $\vartheta(0) = 0$, $\dot\varphi(0) = \Omega_0$, $\dot\vartheta(0) = \omega_0$ all'espressione dell'energia $E = \frac{mR^2}{6}\left(\dot\varphi^2 + (1+\sin^2\varphi)\dot\vartheta^2\right) - kR^2\cos\varphi$.

Analogamente, valutiamo il mom. ang. (sull'asse z) J grazie alle cond. iniz, quindi

$$J = \frac{2mR^2}{3}\omega_0^2,$$

ne segue che deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{mR^2}{6}\left(\Omega_0^2 + 2\omega_0^2\right) = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}\frac{m^2R^4}{mR^2}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{9}_{3}}\omega_0^2 + kR^2$$

$$\longrightarrow \frac{mR^2}{6}\left(\Omega_0^2 + 2\omega_0^2\right) = \frac{2}{3} mR^2\omega_0^2 + kR^2$$

$$\Longrightarrow \frac{mR^2\Omega_0^2}{6} = \frac{mR^2\omega_0^2}{3} + kR^2$$

La relazione richiesta è quindi

$$\Omega_0^2 = 2\omega_0^2 + \frac{6k}{m},$$

$$\text{cioè } \Omega_0 = \pm\sqrt{2\omega_0^2 + \frac{6k}{m}} .$$

Per quanto riguarda l'esercizio 3b basta applicare la conservazione della componente lungo l'asse z del momento angolare; abbiamo infatti che

$$J\left(\varphi(0),\theta(0),\dot\varphi(0),\dot\theta(0)\right) = \lim_{t\to\infty} J\left(\varphi(t),\theta(t),\dot\varphi(t),\dot\theta(t)\right)$$

$$\frac{2mR^2}{3}\omega_0 \qquad\qquad \frac{mR^2}{3}\lim_{t\to\infty}\dot\theta(t)$$

Quanto ci viene richiesto, altro non è che

$$\frac{\omega_0}{\lim_{t\to+\infty}\dot\theta(t)} = \frac{\frac{3J}{2mR^2}}{\frac{3J}{mR^2}} = \frac{1}{2} .$$

Detto in altri termini, quando l'asta CD tende ad assumere la posizione verticale il sistema dimezza la sua inerzia rispetto all'asse z (perché all'inizio ci sono 2 aste nel piano Oxy, mentre per $t\to\infty$, solo 1 ha componenti nel piano orizzontale), quindi è naturale che la velocità angolare asintotica sia il doppio di quella iniziale!