

Prova scritta di Fisica Matematica I
per il corso di laurea in Matematica
20 Gennaio 2015

Un sistema meccanico è costituito da due aste rigide, che hanno come estremi le due coppie di punti (A, B) e (C, D) ; esse si muovono rispetto ad un riferimento inerziale $Oxyz$, con asse delle z verticale. Ciascuna delle aste è di lunghezza $2R$, massa m e tale che la densità di massa al suo interno è omogenea. Il dispositivo vincolare è tale da realizzare le seguenti tre condizioni: (a) le due aste hanno in comune il loro punto medio, il quale rimane costantemente sovrapposto all'origine (cioè $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{CO} = \overline{OD} = R$); (b) l'asta di estremi A, B è libera di ruotare nel piano orizzontale Oxy ; (c) l'asta di estremi C, D può ruotare solo nel piano verticale passante per l'origine e normale all'asse passante per A e per B . Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega C al punto P , che è situato sull'asse z , a distanza R dall'origine e al di sotto di essa. Inoltre, il solo punto C è anche dotato di carica elettrica q ed è soggetto a un campo elettrico uniforme di norma uguale a \mathcal{E} , parallelo ed equiverso all'asse x . È da intendersi che tutti i parametri del problema, ovvero m, R, k, q e \mathcal{E} , abbiano valori reali positivi, salvo avviso contrario nel prosieguo del testo.

Suggerimento: è conveniente adottare il seguente semplice metodo per esprimere la posizione di un generico punto della seconda asta (e, in particolare, del suo estremo C) in funzione delle coordinate lagrangiane adottate. Dapprima, si scrivano le coordinate del punto considerato rispetto al riferimento $Ox'y'z$ tale che A giace sul semiasse delle x' positive. Successivamente, si applichi la matrice di rotazione che consente di esprimere le coordinate nel riferimento $Oxyz$ in funzione di quelle (note) in $Ox'y'z$.

I vincoli sono realizzati in modo tale che, durante il moto, gli estremi C e D possono attraversare, senza che vi sia alcun urto, il punto P . Si supponga che i vincoli siano ideali e si risponda alle domande seguenti.

- (1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Lagrange.
- (2) Si determinino le posizioni di equilibrio, al variare dei parametri, e se ne studi la stabilità, limitatamente al caso in cui $kR = q\mathcal{E}$.
- (3) Si studi ora l'evoluzione del sistema nel caso in cui la carica elettrica è assente (cioè si ponga $q = 0$), con valori generici di m, k e R . Si consideri il moto che fa seguito a condizioni iniziali tali che, al tempo $t = 0$:

A giace sul semiasse delle x positive; C giace sul semiasse delle y positive; la velocità angolare di rotazione di A è uguale a ω_0 ; la componente verticale della velocità angolare di C è uguale a Ω_0 .

- (3a) Si determini la relazione che deve essere soddisfatta da ω_0 e Ω_0 , affinché la legge del moto (che fa seguito alle suddette condizioni iniziali) è tale che l'estremo C tende asintoticamente a raggiungere il semiasse delle z positive.
- (3b) Si determini il rapporto tra ω_0 e il valore che assume la velocità angolare di rotazione di A nel limite di $t \rightarrow +\infty$.